LINEARE ALGEBRA - KLAUSUR 1 (DEZEMBER 03)

Aufgabe 1

Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ lässt sich der reelle Vektor

$$a = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ t \end{pmatrix}$$

als $\mathbb{R}$-Linearkombination der folgenden 3 Vektoren schreiben?

$$b := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad c := \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad d := \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} 12x + 9y + 3z + 10t &= 13 \\ 4x + 3y + z + 2t &= 3 \\ 8x + 6y + 2z + 5t &= 7 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Für jede 2x2-Matrix A mit Einträgen aus K gilt:

$$A^2 - Tr(A) \cdot A + det(A) \cdot Id = 0$$

Dabei sei $Tr \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$. (Spur von A)

Aufgabe 4

Seien V ein K-Vektorraum, $x, y \in V$ zwei Vektoren, $\lambda, \mu \in K$ zwei Koeffizienten. Zeigen Sie, folgende Bedinungen sind äquivalent:

(a) $\lambda x + \mu y = \mu x + \lambda y$

(b) $x = y$ oder $\lambda = \mu$

Aufgabe 5

Seien V ein K-Vektorraum, $U, W \subseteq V$ zwei K-lineare UVR und $\rho : U \oplus W \to V$ mit $(u, w) \mapsto u + w$. Zu zeigen:

(a) ρ ist K-linear

(b) ρ ist injektiv $\Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$

(c) $Im(\rho) = < U \cup W >$

Aufgabe 6

Seien $U, V \in \mathbb{R}^n$ zwei Untervektorräume mit

$$dimU + dimV > n.$$

Zu zeigen: $U \cap V$ besteht aus unendlich vielen Vektoren.