Aufgabe 1

Bestimmen Sie für jeden reellen Wert des Parameter t sämtliche Lösungen des nachfolgenden linearen Gleichungssystems (denn Koeffizienten in $\mathbb{R}$ liegen sollen).

$$\begin{aligned} 4x - t \cdot y + t \cdot z &= 4 \\ x - y + t \cdot z &= 0 \\ 3x - t \cdot y + t \cdot z &= 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Seien $f : V \to W$ eine surjektive K-lineare Abbildungm $W' \subseteq W''$ ein K-linearer Unterraum unf $V' := f^{-1}(W')$ das vollständige Urbild von W' bei f. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$V/V' \to W/W', v + V' \mapsto f(v) + W'$$

wohldefiniert, K-linear und bijektiv ist.

Aufgabe 3

Seien V ein K-Vektorraum und W', $W'' \subseteq V$ zwei K-lineare Unterräume mit

$$\dim(W' + W'') = 1 + \dim(W' \cap W''.$$

Zeigen Sie, dass dann einer der beiden Unterräume gleich $W' + W''$ und der andere gleich $W' \cap W''$ ist.

Aufgabe 4

Sei A eine Matrix vom Typ $(5, 5)$ mit reellen Einträgen, deren Transponiertes gleich dem Negativen ist: $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass $\det A = 0$.

Aufgabe 5

DIe $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ habe in den beiden Diagonalen über und unter der Hautdiagonalen lauter Einsen als Einträge. Alle anderen Einträge seien gleich Null:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige Sie, dass gilt:

$$\det A = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ (-1)^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$