1. Aufgabe

Seien m und n natürliche Zahlen. Begründen Sie, dass genau dann $m = n$ gilt, wenn es eine bijektive Abbildung $\varphi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ gibt.

2. Aufgabe

Geben Sie einen Körper mit genau drei Elementen an.

3. Aufgabe

(a) Erklären Sie den Begriff eines Vektorraumes V über einem Körper K.

(b) Erklären Sie den Begriff der linearen Unabhängigkeit einer Familie $(\mathbf{x}_j)_{j\in J}$ von Vektoren eines K-Vektorraumes V.

4. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob folgende Teilmengen M des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V einen Unterraum bilden:

(a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 < x_2 \right\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

(b) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_2 + x_3 = 0 \right\}$,

$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3 \right\}$.

5. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ im K-Vektorraum V linear unabhängig sind:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) V sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\mathbf{v}_1$ sei gemäß $\mathbf{v}_1(x) := e^x$, $\mathbf{v}_2$ sei gemäß $\mathbf{v}_2(x) := \sin x$, $\mathbf{v}_3$ sei gemäß $\mathbf{v}_3(x) := \cos x$ definiert.

6. Aufgabe

Untersuchen Sie, ob folgende Vektorsysteme $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis des Unterraumes U des K-Vektorraumes V bilden:

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \right\}$;

$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) $V = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{C}$, $U = \mathbb{C}^2$; $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Aufgabe

Seien U_1 und U_2 nichttriviale Unterräume eines endlichdimensionalen K-Vektorraumes V. Jeder Vektor $\mathbf{v} \in V$ gestatte eine eindeutige Darstellung $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ mit gewissen Vektoren $\mathbf{u}_1 \in U_1$ und $\mathbf{u}_2 \in U_2$. Weisen Sie nach, dass gilt:

$$\dim_K U_1 + \dim_K U_2 = \dim_K V.$$

8. Aufgabe

Seien $\mathbb{A} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbb{B} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrizen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$ mit $\mathbb{C} := (\mathbf{a}^T \mathbb{A} \mathbf{b})\mathbb{B}$ und $\mathbb{D} := (i\mathbb{A})^* \mathbb{B} + \mathbf{b}\mathbf{a}^*$.

9. Aufgabe

Seien $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ und $\mathbb{B} \in \mathbb{R}^{q \times p}$. Beweisen Sie die Gültigkeit von $\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$.

10. Aufgabe

Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Weiterhin seien $\mathbb{A} \in K^{p \times p}$, $\mathbb{C} \in K^{q \times p}$ und $\mathbb{D} \in K^{q \times q}$.

(a) Weisen Sie nach, dass im Falle der Invertierbarkeit der Matrizen $\mathbb{A}$ und $\mathbb{D}$ die Matrix

$$\mathbb{E} := \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{O}_{p \times q} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix}$$

invertierbar ist

(b) Bestimmen Sie im Fall, dass $\mathbb{A}$ und $\mathbb{D}$ invertierbar sind, die zu $\mathbb{E}$ inverse Matrix $\mathbb{E}^{-1}$.