Probeklausur - Lineare Algebra I

Mathias Becker
20.Dezember 2007

Name :

Vorname :

Matrikelnummer :

Studiengang :

Seminargruppe :

Bearbeitungsdauer: 120 Minuten

Aufgabe	*I*.1	*I*.2	*I*.3	*I*.4	*I*.5	*I*.6
Punkte	.../3	.../3	.../2	.../4	.../2	.../3

Aufgabe	*II*.1	*II*.2	*II*.3	*II*.4	*Gesamt*
Punkte	.../8	.../6	.../6	.../8	.../45

Die Punkte dienen nur als Orientierung. Kleinere Abweichungen sind möglich.

Aufgabenteil I

Dieser Aufgabenteil besteht aus mehreren, sehr kurzen Aufgaben. Es sind keine vollständigen Beweise gefordert. Versuchen Sie nicht mehr als 5 Minuten für jede Aufgabe in diesem Teil zu verwenden.

Aufgabe I.1
Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ und ein lineares Gleichungssystem gegeben durch $Ax = b$. Bezeichne L die Menge aller $x \in \mathbb{R}^n$, die dieses Gleichungssystem lösen.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen immer wahr oder falsch sind.

Aussage	*wahr*	*falsch*
$b \in \mathbb{R}^n$	o	o
L $\neq \{\}$	o	o
falls das GS homogen ist, so ist L ein Unterraum von R^n	o	o
für $x_1, x_2 \in L$ ist $x_1 + x_2 \in L$	o	o
falls $n > m, b \neq 0$ dann besteht L nicht aus genau einem Element	o	o
falls $n < m, b = 0$ dann ist $dim(L) \geq 1$	o	o

Aufgabe I.2
Sei $(R, +, *)$ ein Ring. Welche ZUSÄTZLICHEN Eigenschaften müssen erfüllt sein, damit $(R, +, *)$ ein Körper ist?

Aufgabe I.3
Sei $(K, +, *)$ ein Körper. Ist $(K, *)$ eine abelsche Gruppe? Begründen Sie kurz!

Aufgabe I.4
Sei die Abbildung f definiert durch:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ & x & \mapsto & x+\mathbb{Q} \end{array}$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Aussage	*wahr*	*falsch*
f ist injektiv	o	o
f ist surjektiv	o	o
f ist bijektiv	o	o
$f(1)$ ist das Nullelement von $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$	o	o
$f(0)$ ist das Nullelement von $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$	o	o
$0+\mathbb{Q}$ liegt im Kern von f	o	o
Der Kern von f enthält nur die 0	o	o
Das Bild von f enthält $0+\mathbb{Q}$	o	o

Aufgabe I.5
Wir betrachten den Vektorraum $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, *)$. Sei nun g eine beliebige Gerade in $\mathbb{R}^2$. Ist die Menge aller Punkte von g ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie kurz!

Aufgabe I.6
Wir betrachten den Vektorraum $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, *)$. Sei U die Menge aller Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

für die gilt $x_1 + x_2 = x_3$. Die Menge U ist ein Unterraum (das können Sie als gegeben ansehen). Geben Sie eine Basis von U an!

Aufgabenteil II

Die Aufgaben in diesem Teil verlangen Beweise. Pro Aufgabe sollten sie etwa 15-20 Minuten aufwenden.

Aufgabe II.1
Sei $(G,+)$ eine Gruppe. Sei G' die Menge derjenigen Elemente aus G, die sich kommutativ mit allen Elementen aus G verhalten:
$G' := \{g' \in G : \text{für jedes } g \in G \text{ gilt } g' + g = g + g'\}$
Zeigen Sie, dass G' eine Untergruppe von G ist!

Aufgabe II.2
Sei $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ und $B \in \mathbb{R}^{nxk}$. Zeigen Sie, dass folgende Gleichung gilt!

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Aufgabe II.3
Sei n eine natürliche Zahl. Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^n$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ n+1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \\ n+2 \end{pmatrix}, \ldots\ldots, v_n = \begin{pmatrix} n \\ n+1 \\ n+2 \\ \vdots \\ 2n-1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Dimension des von diesen Vektoren erzeugten Unterraumes (gemeint ist als Unterraum des Vektorraumes $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, *)$)!

Aufgabe II.4
Seien V, V', V'' endlichdimensionale K-Vektorräume sowie

$$f : V \to V' \text{ und } g : V' \to V''$$

zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie:
a)Die Abbildung $g \circ f : V \to V''$ ist linear.
b)Falls $Ker(f) \neq \{0\}$, so ist auch $Ker(g \circ f) \neq \{0\}$.
c)Falls f surjektiv ist und $Ker(g) \neq \{0\}$, so ist auch $Ker(g \circ f) \neq \{0\}$.
d)Finden Sie ein Beispiel dafür, dass $Ker(g) \neq \{0\}$ und $Ker(g \circ f) = \{0\}$.