Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I
Wintersemester 2006/2007

Folgende Hinweise sind unbedingt zu beachten:
Die einzelnen Aufgaben sind auf jeweils gesonderten Blättern abzugeben. **Jedes** abgegebene Blatt muß oben mit **Name, Matrikelnummer und Nummer der darauf behandelten Aufgabe** versehen sein. Diese Angaben sowie die Lösungen sind in **gut lesbarer Schrift** zu verfassen! Alle Aussagen sind so zu formulieren, daß die entsprechenden Schlußketten zweifelsfrei nachvollziehbar ist. Bei Zitaten ist die jeweilige Quelle genau anzugeben.

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{Q}^5$ des folgenden linearen Gleichungssystems *(4 Punkte)*

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} X_1 & + & X_2 & - & X_3 & & & & & = & 0 \\ 2X_1 & & & & & + & X_4 & - & X_5 & = & 0 \\ X_1 & & & & & - & 2X_4 & - & X_5 & = & 0 \end{array}$$

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{Q}^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems *(4 Punkte)*

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} X_1 & - & X_2 & + & X_3 & - & X_4 & = & 0 \\ X_1 & & & - & X_3 & & & = & 1 \\ & & X_2 & & & + & X_4 & = & 3 \end{array}$$

Aufgabe 2: Überprüfen Sie, welche der nachfolgenden Matrizen im jeweils angegebene Matrizenring invertierbar ist und berechnen Sie im Fall der Invertierbarkeit die Inverse:

(a) $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2}-\sqrt{3} & 1 \\ -2 & \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$ *(5 Punkte)*

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}$ *(5 Punkte)*

Aufgabe 3: Seien $\mathfrak{a}_1 = (0,1,-1,1)$, $\mathfrak{a}_2 = (1,-1,0,-2)$, $\mathfrak{a}_3 = (1,0,-1,-1)$, $\mathfrak{a}_4 = (1,1,-2,0)$, $\mathfrak{b}_1 = (-1,0,-2,3)$, $\mathfrak{b}_2 = (1,2,3,5)$, $b_3 = (1,4,4,-7)$, Elemente aus $\mathbb{Q}^4$.
Ferner sei $U := \mathbb{Q}\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4\}$ bzw. $V := \{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\}$ der von $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4\}$ bzw. $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\}$ erzeugte Untervektorraum des $\mathbb{Q}^4$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rang}_{\mathbb{Q}} U$ und $\operatorname{rang}_{\mathbb{Q}} V$. *(6 Punkte)*

(b) Zeigen Sie, daß $U + V = \mathbb{Q}^4$ und $U \cap V = 0$. *(6 Punkte)*
Hinweis: Beachten Sie die Rangformel in Satz 3.36(2) der Vorlesung.

Aufgabe 4: Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement $1_R \neq 0_R$ und sei $n \in \mathbb{N}^+$. Zeigen Sie:

(a) Für symmetrische (antisymmetrische) Matrizen $A, B \in R^{n,n}$ ist AB genau dann symmetrisch (antisymmetrisch), wenn $BA = AB$ ($BA = -AB$). *(3 Punkte)*

(b) Eine Matrix $A \in \mathrm{Gl}_R(n)$ ist genau dann symmetrisch (antisymmetrisch), wenn A^{-1} symmetrisch (antisymmetrisch) ist. *(5 Punkte)*

(c) Besteht eine Untergruppe U der $\mathrm{Gl}_R(n)$ nur aus symmetrischen Matrizen, so ist U abelsch *(2 Punkte)*

Gesamtpunktzahl: 40 Punkte

Zusatzaufgaben

Die Bearbeitung der nachfolgenden Aufgaben ist freiwillig. Die dabei erreichten Punkte werden jedoch bei der Ermittlung der Gesamtpunktzahl berücksichtigt.

Aufgabe 5: Für welche $s \in \mathbb{Q}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem lösbar?

$$\begin{array}{rcrcrcr} X_1 & + & 2X_2 & + & 3X_3 & = & 6 \\ 4X_1 & + & 5X_2 & + & 6X_3 & = & -\binom{s+1}{2} \\ 7X_1 & + & 8X_2 & + & s^2X_3 & = & 4s \end{array}$$

Bestimmen Sie für diese s die Lösungsmenge $L_s \subseteq \mathbb{Q}^3$. *(5 Punkte)*

Aufgabe 6: Seien R, n wie in Aufgabe 4.

Bildet für $n \geq 2$ die Menge der symmetrischen Matrizen aus $\mathrm{Gl}_R(n)$ eine Untergruppe der $\mathrm{Gl}_R(n)$? (Begründung angeben!) *(3 Punkte)*