1. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Bestimmen Sie dei Menge M aller Tripel $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, für die die durch

$$f_{\alpha\beta\gamma}(x + \mathrm{i}y) = x^4 + \mathrm{i}\alpha x^3 y + \beta x^2 y^2 + \mathrm{i}\gamma x y^3 + y^4, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

gegebene Funktion $f_{\alpha\beta\gamma} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

(ii) Bestimmen Sie für jedes $(\alpha, \beta, \gamma) \in M$ die Menge $U_{\alpha\beta\gamma} \subset \mathbb{C}$ aller Punkte $z \in \mathbb{C}$, an denen $f_{\alpha\beta\gamma}$ winkeltreu ist.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^4} \, \mathrm{d}x.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

(i) Entwickeln Sie die durch

$$f(x) = \frac{1}{1 + z^2}$$

gegebene Funktion in eine auf dem Kreisring

$$R = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z - \mathrm{i}| < \infty\}$$

konvergente Laurentreihe.

(ii) Begründen oder widerlegen Siee, dass diese Laurentreihe am Punkt $z_1 = 0$ konvergiert.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie das Bild der Menge

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 1\}$$

unter der Abbildung

$$f : \tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

5. Aufgabe (4 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{K_1(0)} \mathrm{e}^{-1/z^2} \, \mathrm{d}z.$$