Klausur Funktionalanalysis I am 05.02.2010

Teil A

1. Welche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind kompakt?
2. Man gebe ein Beispiel eines metrischen Raumes an, der nicht vollständig ist.
3. Man definiere den Hilbertschen Folgenraum $l^2(\mathbb{N})$ (Menge und Skalarprodukt).
4. Man formuliere einen der beiden Sätze von RIESZ.
5. T sei ein beschränkter linearer Operator auf einem Hilbertraum. Man charakterisiere, wann T ein Projektionsoperator ist.
6. Wie lautet das HAHN-BANACH-Theorem für reelle Vektorräume?
7. Wie lautet der Satz von der offenen Abbildung?
8. Man definiere den Begriff der Spektralschar.
9. Man gebe eine der äquivalenten Charakterisierungen der Kompaktheit eines beschränkten linearen Operators aus der Vorlesung an.
10. T sei ein kompakter Operator auf einem Hilbertraum. Man definiere die Schmidt-Darstellung von T.

Zusatz:

11. Man charakterisiere Eigenwert und zugehörigen Eigenraum eines selbstadjungierten beschränkten Operators T mit Hilfe der Spektralschar von T.
12. Man gebe eine der äquivalenten Charakterisierungen für einen HILBERT-SCHMIDT-Operator aus der Vorlesung an.

Teil B

1. Man untersuche, ob folgende Ausdrücke Skalarprodukte auf dem $\mathbb{R}^2$ sind:
   $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_1 := x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$,
   $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle_2 := x_1 y_1 + 5x_1 y_2$.

2. Man untersuche, welche der Inklusionen
   $L^1(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ bzw. $L^2(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ richtig sind, und beweise dies.

3. Für $\alpha > 0$ sei $F_\alpha(f) = \int\limits_0^1 \frac{f(x)}{x^\alpha} dx, \;\; f \in C[0, 1]$.
   Man untersuche, ob F_α ein wohldefiniertes stetiges lineares Funktional auf dem Banachraum $C[0, 1]$ ist.

4. Für $(x_n) \in l^2(\mathbb{N})$ sei $T(x_n) = (\frac{1}{n} x_n)$.

   a) Man zeige: T ist ein beschränkter linearer Operator auf dem Hilbertraum $l^2(\mathbb{N})$. Man bestimme die Norm von T und beweise dies.

   b) Man bestimme die Eigenwerte von T.

   c) Man bestimme das Spektrum von T.

   Zusatz:

   d) Ist T kompakt?

5. λ sei Eigenwert des kompakten Operators T auf dem Hilbertraum H
   Man zeige: Wenn $\lambda \neq 0$ ist, dann ist der zugehörige Eigenraum endlich dimensional.
   Zusatz: Gilt dies auch für $\lambda = 0$?

6. T sei ein beschränkter selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $f_t(x) = e^{itx}$ und $U(t) = f_t(T)$.

   a) Man zeige: $U(t)$ ist ein unitärer Operator.

   b) Man beweise: $U(t_1)U(t_2) = U(t_1 + t_2)$ für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.