Teil A musste nach ca. 20 min abgegeben werden; in beiden Teilen durften keine Hilfsmittel verwendet werden.

Klausur Funktionalanalysis I am 10.02.2009

Teil A

1. E sei ein reeller Vektorraum. Man definiere eine Norm auf E.
2. Man definiere die Vollständigkeit eines metrischen Raumes.
3. Man definiere die Kompaktheit eines metrischen Raumes.
4. Was ist ein Banachraum?
5. Wie lautet der Satz vom abgeschlossenen Graphen?
6. Wie lautet der Satz von Banach-Steinhaus?
7. Man definiere die Norm eines beschränkten linearen Operators.
8. Was ist ein unitärer Operator?
9. Man gebe eines der beiden grundlegenden Beispiele einer Spektralschar aus der Vorlesung an.
10. Man definiere die schwache Konvergenz einer Folge eines Banachraumes.
11. Man definiere den Begriff des vollstetigen Operators auf einem Banachraum.
12. Man formuliere den Hilbert-Schmidtschen Entwicklungssatz auf einem unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum.

Teil B

1. Für $(x_n) \in l^2(\mathbb{N})$ sei $F((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$.
   Man zeige: $F((x_n))$ ist wohl definiert und ein stetiges lineares Funktional auf dem Hilbertraum $l^2(\mathbb{N})$.

2. Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2, y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sei
   $\langle x, y\rangle = x_1\bar{y}_1 + \alpha x_1\bar{y}_2 + \alpha x_2\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2$.
   Man untersuche, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ ist.

3. Man untersuche, welche der Inklusionen

   $$L^1[0,1] \subseteq L^2[0,1] \text{ bzw. } L^2[0,1] \subseteq L^1[0,1]$$

   richtig ist.
   Man definiere beide Räume. Man beweise die Inklusion oder man gebe ein Gegenbeispiel an.

4. Sei $H = L^2[0,1]$ bezüglich des Lebesguemaßes und $(Tf)(t) = tf(t)$ für $f \in H$.

   a) Man zeige: T ist beschränkt und selbstadjungiert.

   b) Man bestimme $\sigma(T)$.

5. (α_n) sei eine beschränkte komplexe Zahlenfolge. Für $(x_n) \in l^2(\mathbb{N})$ sei $T(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_1 x_2, \alpha_2 x_3, \dots)$.
   Man bestimme den adjungierten Operator T^* auf dem Hilbertraum $l^2(\mathbb{N})$.

6. Sei $T = T^* \in \mathcal{L}(H)$ und f sei eine stetige reellwertige Funktion auf $\sigma(T)$ mit $f(t)^2 = f(t)$ für alle $f \in \sigma(T)$.
   Man zeige: $P = f(T)$ ist ein Projektionsoperator.