Analysis 2 Klausur

1.) Taylorreihe bei $x_0 = 0$ von $f(x) = -2\ln(4-x^2)$

2.) Stammfunktion von $\frac{1}{x^2-4x-12}$

3.) Für welche t ex.

$$\int_0^1 \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^t}$$

4.) z. z. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+2y^2+\frac{1}{2}z^2 = 1\}$ kompakt?

5.) a) Def. der Diffbarkeit einer Abb. $f: U \to \mathbb{R}^m$ im Punkt $x_0 \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge

b) Differential der Abb. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (x^3y, xe^{y-x})$ im Pkt (x_0, y_0)

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig diffbar und $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x,y) = f(x^2-y^2, xe^{xy})$

Berechne $\frac{\partial g}{\partial x}$ und $\frac{\partial g}{\partial y}$

6.) Hat die Abb $f(x,y) = (x^3-3xy^2, 3x^2y-y^3)$ in Umgebung eines Punktes $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ stetig diffbare Umkehrabbildungen.

Teil B

1. z. z. Abb. $f: X \to Y$ zwischen 2 metr. Räumen ist genau dann stetig, wenn alle Urbilder $f^{-1}(U)$ offener Teilmengen $U \subset Y$ wieder offen sind

2.) z. z. jede stetige Fkt $f: K \to \mathbb{R}$ auf kompaktem metrischen Raum K nimmt ihr Supremum an. (also f besitzt ein Maximum)

3.) Entscheide ob $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ homöomorph sind, und begründe Entscheidung

4.) Betrachte Abb. $F: M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$ auf dem Vektorraum der $n \times n$ Matrizen, gegeben durch $F(A) = A^2$.
z. z. F ist in jedem Punkt $A_0 \in M(n \times n, \mathbb{R})$ diffbar und berechne Differential $D_{A_0} F(A_0)$

5.) Gebe auf VR $X = C^1([0,1], \mathbb{R})$ der stetig diffbaren Funktionen auf $[0,1]$ jeweils eine Norm $\|\cdot\|$ an, bzgl. der $(X, \|\cdot\|)$ vollständig ist und eine Norm $\|\cdot\|'$, bzgl. der $(X, \|\cdot\|')$ nicht vollständig ist.
Gebe Beispiel einer Cauchy Folge in $(X, \|\cdot\|')$ welche nicht kvg. bzgl. $\|\cdot\|'$ ist. Ohne Beweis

6.) Formulier Banachschen Fixpunktsatz