Klausur zur Analysis A 2

Name:										
Matrikelnummer:										
Studiengang:										
Übungsgruppe:										
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
Punkte:										

Erlaubte Hilfsmittel: Kopf, Papier, Schreibmittel

Beachte: Auf **jedem selbstbeschriebenen Blatt** sind Name und Matrikelnummer zu notieren! Alle Schlüsse sind nachvollziehbar aufzuschreiben, sowie alle verwendeten Sätze zu zitieren!

Arbeitszeit: 60 Minuten

AUFGABENTEIL

1. Existieren die folgenden Grenzwerte, und wenn ja, welchen Wert haben sie? **(2 Punkte)**

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x+1}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\tan x}$

2. Entscheiden Sie, ob die nachfolgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Formulieren Sie falsche Behauptungen richtig oder geben Sie ein Gegenbeispiel an. **(4 Punkte)**

a) Zu jeder stetigen Funktion $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert das Taylorpolynom $T_n(x)$ um $x_0 \in I$, so dass gilt: $f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x)$.

b) Jede Funktion f mit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die in $x_0 \in I$ differenzierbar ist, ist in x_0 auch stetig.

c) Die Ableitung von $f(x) = \ln(\ln x^3)$ ist $f'(x) = \frac{1}{x^3 \cdot \ln x^3}$ für $x \in (1, \infty)$.

d) Jede Potenzreihe mit Konvergenzradius 1 divergiert überall außerhalb des Inneren des Einheitskreises.

Fortsetzung auf Seite 2

3. Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \arctan x \text{ um } x_0 = 0$$

in eine Taylorreihe. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe? **(3 Punkte)**

4. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^4}(x+3)^{5n}.$$

(2 Punkte)

5. Berechnen Sie

$$\int \frac{x+4}{x^2-x-6}\, dx.$$

(3 Punkte)

6. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

$$\text{a)} \int \frac{dx}{\sqrt{x}-x} \qquad \text{b)} \int \sin^2 x \cos x \, dx$$

(4 Punkte)

7. Geben Sie für die Integranden geeignete Definitionsbereiche auf der reellen Achse an und berechnen Sie dann die Integrale

$$\text{a)} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\, du \qquad \text{b)} \int_0^1 u \ln u \, du$$

(6 Punkte)

8. Berechnen Sie für

$$u(x,y) := \ln\left(x^2+y^2\right) \text{ für } (x,y) \neq (0,0)$$

den Wert des Ausdrucks $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. **(3 Punkte)**

9. Es sei X ein normierter Raum. Vervollständigen Sie die zwei nachfolgenden Definitionen:
a) Definition: $K \subset X$ heißt (folgen-)kompakt gdw. ...
b) Definition: $A \subset X$ heißt beschränkt gdw. ...
c) Äußern Sie sich zu folgender Aussage: beliebige Vereinigungen abgeschlossener Teilmengen von X sind abgeschlossen.
(3 Punkte)

Zusatz: Zeigen Sie den Satz: Jede (folgen-)kompakte Menge $K \subset X$ ist beschränkt.
(1 Punkt)

Summe: 30 Punkte