1. Aufgabe (4 Punkte)

Geben Sie jeweils eine Stammfunktion an.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x \quad (-2 < x < 2)$, (b) $\displaystyle\int x^4 \ln(x^2)\,\mathrm{d}x \quad (x > 0)$,

(c) $\displaystyle\int \exp(x)\exp(\exp(x))\,\mathrm{d}x \quad (x \in \mathbb{R})$, (d) $\displaystyle\int \frac{1}{(\cos(x)-\sin(x))^2-1}\,\mathrm{d}x \quad (0 < x < \pi/2)$.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Nimmt die durch $f(x,y) = x^4 + y^6 - 3xy^2$ definierte Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(i) auf $B_3(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : ||x||_2 \leq 3\}$ ihr Minimum an?

(ii) auf $\mathbb{R}^2$ ihr Minimum an?

3. Aufgabe (4 Punkte)

Sind die folgenden beiden Aussagen richtig oder falsch?

(i) Für jede stetige Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{R}$ gilt: Ist $(f(B_1(0)))^\circ = \emptyset$, so ist f konstant.

(ii) Für jede stetige Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, gilt: Ist $(f(B_1(0)))^\circ = \emptyset$, so ist f konstant.

Dabei ist $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_2 \leq 1\}$, $n \geq 1$.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = (\exp(\cos(y)), \exp(\sin(x)))$. Ist das Bild $f(\mathbb{R}^2)$ von f kompakt? Ist das Urbild $f^{-1}((1,1))$ des Punktes $(1,1)$ kompakt?

5. Aufgabe (4 Punkte)

Ist die durch

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 < 1 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 \geq 1 \end{cases}$$

gegebene Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ überall stetig differenzierbar?

6. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \exp(x) + \cos(y) \\ \exp(y) - \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Besitzt f eine differenzierbare Umkehrfunktion?