Aufgabenteil für alle Teilnehmer

1. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion (3 P.)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2.$$

2. Finden Sie alle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ für die gilt

$$|3x - 6| \leq |x + 1|.$$

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen auf der linken und rechten Seite und kennzeichnen Sie die Lösungsmenge (4 P.).

3. Sei M eine Menge und nichtleer. Definieren Sie den Ausdruck $a = \sup M$ und formulieren Sie das Vollständigkeitsaxiom (3 P.).

4. Nennen Sie ein nur notwendiges, ein nur hinreichendes sowie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Zahlenfolge (3 P.).

5. Bestimmen Sie

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right).$$

(2 P.)

6. Schreiben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ (1 P.):

$$\frac{1+i}{2-3i}.$$

7. Notieren Sie das Quotientenkriterium für unendliche Reihen. (Geben Sie dabei sowohl die Konvergenzaussage, als auch die Divergenzaussage an!) (3 P.).

8. Untersuchen Sie die nachfolgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz. (3 P.)

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$$

9. Für welche $a \geq 0$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n} \quad ? \quad \text{(3 P.)}$$

10. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$$a_n := \frac{n^n z^n}{n!} \quad ?$$

(3 P.)

11. Geben Sie den Definitionsbereich der Funktionen an und bilden Sie die erste Ableitung $f'(x)$. (6 P.)

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 2}$, b) $f(x) = x \ln x - x$, c) $f(x) = x^x$

<u>SUMME: 34 Punkte</u>

NUR für Diplom - Studiengänge und LA Staatsexamen:

12. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf Stetigkeit. Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung. Ist f' stetig? (4 P.)

13. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$. Zeigen Sie, dass dann ein $\xi \in (a, b)$ existiert, sodass $f'(\xi) = 0$. (3 P.)

14. Zeigen Sie für $a > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\sqrt[n]{a} - 1 \right) = \ln a.$$

(3 P.)

<u>SUMME: 44 Punkte</u>