Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. Wolfgang König
27. Januar 2007
8:00 – 9:30 Uhr

Zweite Klausur zur Vorlesung Analysis A

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Übungsleiter(in):

- Tragen Sie zu allererst die obigen Angaben ein, dann lesen Sie bitte die gesamte Klausur bis zum Ende durch.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein einseitig von Ihrer Hand beschriebenes DIN A4-Blatt mit beliebigem Text. Bei Nicht-Deutschsprachigen ist auch ein Wörterbuch zugelassen.
- Mit einer Gesamtpunktzahl von mindestens 40 (von 100) gilt diese Klausur als bestanden. Um den Klausurteil des Übungsscheinkriteriums zu erfüllen, sind mindestens 100 Punkte (von 200) aus insgesamt zwei Klausuren notwendig.
- Bitte tragen Sie auf dieser Seite sonst nichts ein.

Viel Erfolg!

Aufgaben-Nr.	1	2	3	4	5
Punkte					

Gesamtpunktzahl:

20 P. **Aufgabe 1** —— Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt, indem Sie **ausschließlich** die einschlägigen Ableitungsregeln sowie die Beziehungen $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ und $\sin^2 + \cos^2 = 1$ benutzen.

20 P. **Aufgabe 2** —— Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

(ii) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$ konvergiert für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

(iii) Die Ableitung der Funktion $f(x) = \log(\log(x^3))$ ist $f'(x) = \frac{1}{x^3 \log x^3}$ für jedes $x \in (1, \infty)$.

(iv) Für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, \infty)$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n < \infty$ gilt $\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^k} = 0$.

20 P. **Aufgabe 3** —— Zeigen Sie, dass Hintereinanderausführungen gleichmäßig stetiger Funktionen immer gleichmäßig stetig sind.
Ausführlich: Seien $D_f, D_g \subset \mathbb{C}$ nicht leer und $f\colon D_f \to \mathbb{C}$ und $g\colon D_g \to D_f$ gleichmäßig stetig. Dann ist auch $f \circ g\colon D_g \to \mathbb{C}$, definiert durch $f \circ g(x) = f(g(x))$, gleichmäßig stetig.

20 P. **Aufgabe 4** —— Entscheiden Sie ohne Begründung für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Schreiben Sie hierfür ein w für “wahr” bzw. ein f für “falsch” in den Kasten vor der Aussage.

☐ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ konvergiert absolut.

☐ Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x^2$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 2x$ für $x > 0$, ist differenzierbar.

☐ Jede auf einem beschränkten Intervall stetige Funktion ist dort beschränkt.

☐ Jede Potenzreihe mit Konvergenzradius Eins divergiert überall außerhalb des Innern des Einheitskreises.

Bewertung: Jede richtige Antwort erhält fünf Punkte, für jede falsche werden zwei Punkte abgezogen, bei Offenlassen werden weder Punkte gegeben noch abgezogen, und negative Gesamtpunktzahlen werden zu Null gesetzt.

20 P. **Aufgabe 5** ——

(i) Entscheiden Sie mit Begründung für jedes $\alpha \in (0, \infty)$, ob $x^\alpha \ll \exp((\log x)^\alpha)$ oder $x^\alpha \gg \exp((\log x)^\alpha)$ für $x \to \infty$ oder keine der beiden Aussagen gilt.

(Wir erinnern daran, dass $f(x) \ll g(x)$ bedeutet, dass $\lim_{x \to \infty} f(x)/g(x) = 0$ gilt.)

(ii) Entscheiden Sie mit Begründung, ob die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ bzw. $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n$ konvergiert, wobei

$$a_n = \binom{2n}{n}^{-1} \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{4n^2 - 2n + \pi}{1000n^3 - 3n^2 + 7n - 13}.$$