Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. Wolfgang König
25. November 2006
8:30 – 10:00 Uhr

Erste Klausur zur Vorlesung Analysis A

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:

- Tragen Sie zu allererst die obigen Angaben ein, dann lesen Sie bitte die gesamte Klausur bis zum Ende durch.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein einseitig von Ihrer Hand beschriebenes DIN A4-Blatt mit beliebigem Text. Bei Nicht-Deutschsprachigen ist auch ein Wörterbuch zugelassen.
- Mit einer Gesamtpunktzahl von mindestens 40 (von 100) gilt diese Klausur als bestanden. Um den Klausurteil des Übungsscheinkriteriums zu erfüllen, sind mindestens 100 Punkte (von 200) aus insgesamt zwei Klausuren notwendig.
- Bitte kreuzen Sie die von Ihnen bearbeiteten Aufgaben in der folgenden Tabelle an. Ansonsten nehmen Sie bitte keine Einträge vor.

Viel Erfolg!

Aufgaben-Nr.	1	2	3	4	5
Bearbeitet					
Punkte					

Gesamtpunktzahl:

20 P. **Aufgabe 1** —— Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, die die Ungleichung

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k+1} > \frac{13}{24}$$

erfüllen, und beweisen Sie Ihre Aussage mit Hilfe einer Vollständigen Induktion.
Geben Sie dabei eine vollständige Formulierung der Induktionsannahme, und markieren Sie im Induktionsschluss, wo sie eingeht.

20 P. **Aufgabe 2** —— Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Für je zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ gilt die Implikation $A \subset B \implies A^\circ \subset B^\circ$.

(ii) Für je zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ gilt die Implikation $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.

(iii) Beliebige Vereinigungen abgeschlossener Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind abgeschlossen.

(iv) Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthält den Rand ihres Komplements.

20 P. **Aufgabe 3** —— Bestimmen Sie die folgende Menge A (i) mit einer möglichst einfachen Gleichung und (ii) in möglichst einfachen Worten, und (iii) machen Sie eine Skizze von A.

$$A = \{z \in \mathbb{C} \colon 3z\overline{z} - 6z - 6\overline{z} + 9 = 0\}$$

20 P. **Aufgabe 4** —— Entscheiden Sie ohne Begründung für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Schreiben Sie hierfür ein w für “wahr” bzw. ein f für “falsch” in den Kasten vor der Aussage.
Ein Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist ein Häufungspunkt einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \quad \ldots$

☐ $\ldots \forall n \in \mathbb{N}\, \exists m > n\colon \quad |a_m - x| < \varepsilon.$

☐ $\ldots \forall n \in \mathbb{N}\, \forall m > n\colon \quad |a_m - x| < \varepsilon.$

☐ $\ldots \exists n \in \mathbb{N}\, \forall m > n\colon \quad |a_m - x| < \varepsilon.$

☐ $\ldots \exists n \in \mathbb{N}\, \exists m > n\colon \quad |a_m - x| < \varepsilon.$

Bewertung: Jede richtige Antwort erhält fünf Punkte, für jede falsche werden fünf Punkte abgezogen, aber negative Gesamtpunktzahlen werden zu Null gesetzt.

20 P. **Aufgabe 5** ——

(i) Beweisen Sie die *Parallelogrammidentität* in $\mathbb{C}$, also

$$|z-w|^2 + |z+w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big), \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

(ii) Entscheiden Sie ohne Begründung, ob die folgenden beiden Teilmengen von $\mathbb{C}$ kompakt sind oder nicht. Markieren Sie mit ‘K ’ bzw. ‘N’. (Bewertung wie in Aufgabe 4.)

☐ $M_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \neq 2, |z| \leq 3\}.$

☐ $M_2 = \{0\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \{\frac{1}{n} + \mathrm{i}b \colon b \in \mathbb{R}, |b| \leq \frac{1}{n}\}.$