# Klausur zur Differential- und Integralrechnung I

**Aufgabe 1:** (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahl:

$$\frac{(1+\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^3} + \frac{(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^3}$$

b) Es seien $a$, $b$ komplexe Zahlen mit $|a| \neq |b|$ und $z$ eine unimodulare komplexe Zahl. Beweisen Sie, dass dann $\bar{b}z + a \neq 0$ ist und die komplexe Zahl

$$w := (\bar{a}z + b)\Big/\left(\bar{b}z + a\right)$$

wieder unimodular ist. ($z \in \mathbb{C}$ unimodular genau dann, wenn $|z| = 1$.)

**Aufgabe 2:** (4 Punkte)

Eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\geq 1}$ werde rekursiv definiert durch:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \frac{1}{n} \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

**Aufgabe 3:** (4 Punkte)

Zeigen Sie mittels $(\varepsilon, n_0)$-Abschätzung, dass die reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_{n\geq 1}$ mit $a_n = \sqrt{4n^2+5n+2} - 2n$ den Grenzwert $\frac{5}{4}$ besitzt, d. h. geben Sie zu jedem beliebigen $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ an, so dass $\left|a_n - \frac{5}{4}\right| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_o$ gilt.

**Aufgabe 4:** (4 Punkte)

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

a) $$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right)\frac{1}{x-1}$$

b) $$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^4+1} - x^2$$

**Aufgabe 5:** (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Summe der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{n^2}}{2^n} \qquad \text{dabei i imaginäre Einheit}$$

b) Zeigen Sie die Konvergenz und bestimmen Sie die Summe der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{(3^{n+1} - 2^{n+1})(3^n - 2^n)}$$

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} (z-5)^{2n+1}$$

**Aufgabe 6:** (8 Punkte)

1. Wann heißt eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?
2. Muss jede gleichmäßig stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch beschränkt sein, d. h. gibt es dann eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (Beweis oder Gegenbeispiel)?
3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass dann eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ existiert mit

   $$|f(x)| \leq C(|x| + 1) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

4. Zeigen Sie, dass jedes reelle Polynom von mindestens zweitem Grad nicht gleichmäßig stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.