1. Aufgabe (4 Punkte)

Beweisen Sie die Konvergenz bzw. Divergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \left(\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \right) \qquad && n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= (-1)^{2n} \left(\left(1+\tfrac{1}{2n}\right)^{2n+1} - \left(1+\tfrac{1}{2n}\right)^{2n} \right) \qquad && n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

2. Aufgabe (4 Punkte)

Gibt es unter den vier Funktionen a, b, c, d mit

$$\begin{aligned} a(x) &= \left(x+\tfrac{1}{x}\right)^2, \qquad && 0 < x < 1, \\ b(x) &= \left(x+\tfrac{1}{x}\right)^2, \qquad && x > 1, \\ c(x) &= \sqrt{x+\tfrac{1}{x}}, \qquad && 0 < x < 1, \\ d(x) &= \sqrt{x+\tfrac{1}{x}}, \qquad && x > 1, \end{aligned}$$

eine, die gleichmäßig stetig ist? Beweisen Sie Ihre Antwort.

3. Aufgabe

(a) Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der Menge

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 2 \wedge |z+2| < 2\}$$

und begründen Sie durch eine Rechnung (2 Punkte).

(b) Betrachten Sie die Mengen

$$\begin{aligned} K_1 &= \{z \in \mathbb{C} : |z+4| < 6\}, \\ K_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z+3+i| < 5\}, \\ K_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z-2-2i| < 7\}, \\ M &= K_1 \cap K_2 \cap K_3, \\ N &= \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}. \end{aligned}$$

Ist die Inklusion $N \subset M$ wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Rechnung (2 Punkte).

4. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie

(a) die Menge M aller $n \in \mathbb{N}$, für die $5^n > n^3$,

(b) die Menge N aller $n \in \mathbb{N}$, für die $4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 2n^3 + n^2 + 1$.

(In beiden Fällen ist zu beweisen, dass die Menge weder größer noch kleiner ist.)

5. Aufgabe

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist kompakt (1 Punkt).

(b) Die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen ist kompakt (1 Punkt).

(c) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen (1 Punkte).

(d) Der Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen ist offen (1 Punkte).

6. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben Sei die Menge $M = \left\{x \in \mathbb{R}; \exists n \in \mathbb{N} : x = (-1)^n \cdot n + \frac{n^2-1}{n}\right\}$. Beantworten Sie die folgenden Fragen mit ja oder mit nein:

(a) Ist M nach unten beschränkt?

(b) Existiert $\inf M$?

(c) Existiert $\max M$?

(d) Existiert $\min M$?

Zur Bewertung dieser Aufgabe: Für jeder richtige Antwort gibt es 1 Punkt; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 1 Punkt, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werdem mit 0 Punkten bewertet.

7. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge M aller reellen Zahlen x, für die die beiden Potenzreihen

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{17}{k^{17}} x^k \text{ und } Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} x^k$$

konvergieren (und beweisen Sie, dass die Menge weder größer noch kleiner ist).

8. Aufgabe

Betrachten Sie die Funktionen $a, b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$a(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}, b(x) = \sqrt{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|}$$

mit $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie jeweils, dass es sich um eine bzw. keine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ handelt (3 Punkte).
Beweisen Sie, dass $c : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $c(x) = \sqrt{|x_1| + |x_2|}$ eine bzw. keine Norm ist (1 Punkt).