1. Aufgabe

Betrachten Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\dot{u}(t) = \cos(t)\left(u(t) + \cos^2(t)\right), \quad u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{e}.$$

Berechnen Sie $u\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Aufgabe

Lösen Sie die Differenzialgleichung

$$\sin(x)\left(2\cos(x) - \mathrm{e}^{-y}\right)\,\mathrm{d}x + \left(2 + \sin^2(x)\right)\,\mathrm{d}y = 0.$$

3. Aufgabe

Es sei die Differenzialgleichung

$$\dot{x}(t) = x^2(t) - x^3(t)$$

gegeben.
1. Zeigen Sie für alle $c > 0$: Alle Lösungen $x(t)$ mit $|x(t_0)| \leq c$ exisiteren für alle $t \geq t_0$.
2. Zeigen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$: Die Lösung $x(t)$ mit $x(t_0) = a$ existiert für alle $t \geq t_0$.
3. Bestimmen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ für die Lösung $x(t)$ mit $x(0) = a$ den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

4. Aufgabe

Betrachten Sie das Differenzialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t).$$

Ist die Ruhelage $x = (0, 0, 0)$ stabil?

5. Aufgabe

Zeigen Sie: Jede Lösung von

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

ist periodisch.

6. Aufgabe

Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt eine stetige Funktion $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $a(t+1) = a(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so dass folgende beide Aussagen gelten:
Es gibt kein $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\dot{x}(t) = a(t)x(t)$, $x(t+1) = x(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
Es gibt ein $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\dot{y}(t) = a(t)y(t)$, $y(t+2) = y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.