Name/Vorname: **21.07.2011**
Matrikel-Nr.: ....
Lehramt: .... Ja / Nein....................................
Punkte: .... / .... Note: ....

Klausur zur Vorlesung
"Analytische Geometrie" bei Prof. Dr. B. Fritzsche

1. Geben Sie (ohne Begründung) zwei Beispiele für eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ an und skizzieren Sie für beide Beispiele die Menge
$$\mathcal{M} := \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \, d\left(x, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1 \right\}.$$
(4 Punkte)

2. Definieren Sie den Begriff einer Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und geben Sie (ohne Begründung) eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass eine Norm eine von einem Skalarprodukt erzeugte Norm ist. Wie kann man in diesem Fall das Skalarprodukt durch die Norm darstellen? (5 Punkte)

3. Für jedes $\beta \in \mathbb{R}$ bezeichne
$$H_\beta := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
   (a) Bestimmen Sie die Menge B aller $\beta \in \mathbb{R}$, für die H_β eine Ebene ist. (1 Punkte)

   (b) Betrachten Sie den Spezialfall $\beta = 1$ und bestimmen Sie den euklidischen Abstand von $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu H_1 sowie die Menge M_1 aller $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in H_1$, die von $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ einen minimalen euklidischen Abstand haben. (4 Punkte)

   (c) Begründen Sie, dass es genau eine Gerade G im $\mathbb{R}^3$ gibt, die auf H_1 senkrecht steht und durch den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft. Geben Sie diese Gerade G an. (2 Punkte)

   (d) Gibt es eine Gerade $\tilde{G}$, für die $\tilde{G} \cap H_\beta = \emptyset$ für jedes $\beta \in \mathbb{R}$ erfüllt ist? Begründen Sie ihre Antwort! (2 Punkte)

4. Berechnen Sie den euklidischen Abstand der Geraden $G_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $G_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ im $\mathbb{R}^3$. Geben Sie eine Gerade G im $\mathbb{R}^3$ an, die durch ein Paar von Punkten von G_1 und G_2 verläuft, die minimalen euklidischen Abstand unter allen Punktpaaren von Punkten von G_1 und G_2 haben. (5 Punkte)

5. Sei $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ derart, dass $P^2 = P$ und $P^T = P$ gelten. Bezeichne $\mathcal{R}(P)$ den von den Spalten von P erzeugten Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Beweisen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ der Vektor Px gerade die orthogonale Projektion von x auf $\mathcal{R}(P)$ ist. (3 Punkte)