Name/Vorname: **07.10.2011**
Matrikel-Nr.: ....
Lehramt: .... Ja / Nein.....................................
Punkte: .... / .... Note: ....

Klausur zur Vorlesung
"Analytische Geometrie" bei Prof. Dr. B. Fritzsche

Die Klausur umfasst fünf Aufgaben, für die maximal 24 Punkte vergeben werden. Wenn nicht anders ausgewiesen, sind die Antworten zu begründen.

1. (a) Begründen Sie, dass durch $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gemäß
$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| := \max(|x_1|, |x_2|)$$
eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ gegeben ist.
   (b) Untersuchen Sie, ob es ein Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >$ auf $\mathbb{R}^2$ derart gibt, dass $\|\cdot\|$ die von $< \cdot, \cdot >$ erzeugte Norm ist. Begründen Sie Ihre Antwort!
   (c) Sei $\mathbf{y} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Skizzieren Sie im kartesischen Koordinatensystem die Menge $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 1\}$.
   (6 Punkte)

2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und G eine positiv definite reelle $n \times n$-Matrix. Begründen Sie, dass $< \cdot, \cdot > \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gemäß $< \mathbf{x}, \mathbf{y} > := \mathbf{y}^T G \mathbf{x}$ ein Skalarprodukt ist. Geben Sie die zugehörige Metrik auf $\mathbb{R}^n$ an! Begründen Sie, dass sich das euklidische Skalarprodukt durch eine spezielle Wahl von G ergibt. (5 Punkte)

3. (a) Begründen Sie, dass $H := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist und $x := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht zu H gehört.
   (b) Bestimmen Sie den euklidischen Abstand von x zu H!
   (c) Gibt es einen auf der Lotgeraden von x auf H liegenden Punkt $\tilde{x} \neq x$, der von H den gleichen euklidischen Abstand wie x hat? Wenn ja, geben Sie ein solches $\tilde{x}$ an! (6 Punkte)

4. Die Kurse zweier Flugzeuge werden von einer Bodenstation aus kontrolliert, welche im Koordinatenursprung eines gedachten kartesischen Koordinatensystems liegt. Der beobachtete Teil des ersten Flugzeuges liegt auf der Geraden, die die Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneidet, der beobachtete Teil des zweiten Flugzeuges liegt auf der Geraden, die die Punkte $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ schneidet, wobei in den Koordinatenangaben eine Längeneinheit der Länge von einem Kilometer entspricht. Begründen Sie, dass die Flugzeuge auf dem beobachteten Teilstück einen Mindestabstand von einem Kilometer haben. (5 Punkte)

5. Für jedes $\varphi \in [0, 2\pi]$ sei $D_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gemäß
$$D_\varphi \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
definiert.
   (a) Erläutern Sie die geometrische Bedeutung von der Abbildung D_φ.
   (b) Geben Sie (ohne Begründung) ein $\varphi_1 \in (0, 2\pi)$ derart an, dass $\dim \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D_{\varphi_1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\} = 1$ gilt.
   (c) Geben Sie (ohne Begründung) ein $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$ derart an, dass die Vektoren $D_{\frac{\pi}{3}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ und $D_{\varphi_2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ orthogonal zueinander sind. (4 Punkte)