Testat zur Vorlesung Algebra II – Sommersemester 2006

Jede Aufgabe ist auf einem separaten Blatt abzugeben. Auf jedem dieser Blätter ist *gut* und *deutlich lesbar* Name und Matrikelnummer sowie die Nummer der dort behandelten Aufgabe zu vermerken. Alle Aussagen sind zu begründen.

Alle betrachteten Ringe sind kommutativ und besitzen ein vom Nullelement verschiedenes Einselement.

1. Sei $\preceq$ vollständige monotone Ordnungsrelation auf dem kommutativen Monoid M (s. Übungsaufgabe II4). Zeigen Sie:
   a) In M gilt die Kürzungsregel *(2 Punkte)*.
   b) Ist $\preceq$ Wohlordnung, so ist das neutrale Element e von M kleinstes Element von M bzgl. $\preceq$ *(2 Punkte)* und es gilt $M^* = \{e\}$ *(2 Punkte)*.
2. Sei $K := \mathbb{F}_2$ $(\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ zweielementiger Körper und sei $f := X^2 + X + 1_K \in K[X]$, X Unbestimmte. Zeigen Sie, dass f in $K[X]$ irreduzibel *(2 Punkte)* und separabel ist *(2 Punkte)* und berechnen Sie (bis auf Isomorphie) die Galoisgruppe $G(f)$ von f *(4 Punkte)*.
3. Ein Ring R heißt <u>verallgemeinerter Hauptidealring</u>, wenn es für jedes Ideal I von R ein $x \in I$ gibt mit $I = xR$. (Ein Hauptidealring ist demnach ein nullteilerfreier verallgemeinerter Hauptidealring.) Zeigen Sie:
   a) Jeder verallgemeinerter Hauptidealring ist noethersch *(2 Punkte)*.
   b) Jeder Restklassenring eines verallgemeinerten Hauptidealringes ist verallgemeinerter Hauptidealring *(3 Punkte)*.
   c) Jeder Quotientenring eines verallgemeinerten Hauptidealringes ist verallgemeinerter Hauptidealring *(3 Punkte)*.

   d) $\dim R \leq 1$ für jeden verallgemeinerten Hauptidealring R *(5 Punkte)*.
   e) Jeder eindimensionale lokale verallgemeinerte Hauptidealring ist nullteilerfrei (also Hauptidealring) *(7 Punkte)*.
4. Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass für einen R-Modul M genau dann $l_R(M) = 1$ gilt, wenn $M \cong R/m$ mit einem maximalen Ideal m von R *(6 Punkte)*.
5. (Zusatzaufgabe) Sei R ein Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeigen Sie, dass jeder surjektive R-Endomorphismus von M bereits Automorphismus von M ist *(5 Punkte)*.
   Hinweis: Betrachten Sie für $f \in End_R M$ die kommutative R-Unteralgebra $R[f]$ von $End_R M$ und verwenden Sie, dass M ein $R[f]$-Modul ist.