Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Klausur/Testat
zur Vorlesung Algebra I
Wintersemester 2009/10
8. Februar 2010

Wichtiger Hinweis:
Alle abgegeben Blätter müssen beginnend mit "1" lückenlos und ohne Wiederholungen **numeriert** sein. Auf dem ersten Blatt ist außerdem die **Anzahl der abgegebenen Blätter** zu vermerken. **Jedes** abgegebene Blatt muß oben mit **Name, Matrikelnummer und Nummer der darauf behandelten Aufgabe** versehen sein. Diese Angaben sowie die Lösungen sind in **gut lesbarer Schrift** zu verfassen! Alle Aussagen sind zu **begründen**!

Aufgabe 1: Zeigen Sie, daß die folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Polynomring irreduzibel sind (X, Y Unbestimmte):

(a) $X^3 - 6X^2 + 12X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$ *4 Punkte*

(b) $X^5 - 2iX^2 + 1 + i \in \mathbb{G}[X]$ $(\mathbb{G} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\})$ *5 Punkte*

(c) $Y^4 - 3X(X+1)Y + X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X, Y]\ (= (\mathbb{Q}[X])[Y])$ *5 Punkte*

Aufgabe 2:

(a) Ist $x := \sqrt{2} + \pi \in \mathbb{R}$ algebraisch oder transzendent über $\mathbb{Q}$? *6 Punkte*
Hinweis: Betrachten Sie die Zwischenkörper $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $L := K(x) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, x)$ von $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ und verwenden Sie, daß K nach Folgerung 3.32 der Vorlesung algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist. Beachten Sie, daß $\pi = x - \sqrt{2} \in L$.

(b) Zeigen Sie, daß $x := 2 - \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist. Bestimmen Sie ein Minimalpolynom $f \in \mathbb{Q}[T]$ von x und berechnen Sie $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$. *5 Punkte*

Aufgabe 3:

(a) Gibt es ein Element der Ordnung 14 in S_4 ? *3 Punkte*

(b) Zeigen Sie, daß es kein Element der Ordnung 8 in S_4 gibt. *6 Punkte*
Hinweis: Betrachten Sie für $\sigma \in S_4$ die Zyklendarstellung $\sigma = \pi_1 \cdot \ldots \cdot \pi_m$ von σ mit paarweise elementfremden r_i-Zyklen π_i, $i = 1, \ldots, m$, und überlegen Sie sich, welche Werte die r_i dabei nur annehmen können, s. Bemerkung 1.58.1 der Vorlesung.

(c) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Ordnung 2 von S_3. Befindet sich darunter ein Normalteiler von S_3 ? *7 Punkte*
Hinweis: Beachten Sie, daß jede Permutation der Ordnung 2 ein Zweierzyklus ist, also die Gestalt (i, j) mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, hat. Betrachten Sie dann die Permutation $(j, k)(i, j)(j, k)^{-1} \in S_3$, wenn k so gewählt ist, daß $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 4: (*Zusatzaufgabe*) Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Sind $U_1, \ldots, U_m$ Untergruppen von G mit $[G : U_i] < \infty$ für alle $i = 1, \ldots, m$, so gilt $[G : (U_1 \cap \ldots \cap U_m)] \leq [G : U_1] \cdot \ldots \cdot [G : U_m]$. *4 Punkte*

(b) Sei U Untergruppe von G. Dann ist $N := \bigcap_{g \in G} gUg^{-1}$ Normalteiler von G mit $N \subseteq U$. *3 Punkte*

(c) Für jede Untergruppe U von G mit $[G : U] < \infty$ gibt es einen Normalteiler N von G mit $N \subseteq U$ und $\mathrm{Ord}\, G/N < \infty$. *3 Punkte*

Gesamtpunktzahl: 40 Punkte + *10 Zusatzpunkte*