Algebra 1 WS 2006/07 **Klausur**
Prof. Dr. Huber-Klawitter 8.2.2007

1.) Definieren Sie den Begriff des Gruppenhomomorphismus. 2P.

2.) Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort mit etwa 2-3 Sätzen.

(a) Jede algebraische Körpererweiterung ist endlich.

(b) Sei L/K algebraisch, $a \in L$ Nullstelle des Polynoms P und $(P) \subset K[X]$ das von P erzeugte Hauptideal. Dann ist $K[X]/(P)$ ein Körper.

(c) Sei L/K eine Körpererweiterung, $a \in L$. Dann ist $K(a)/K$ endlich. 6P.

3.) Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort mit etwa 2-3 Sätzen.

(a) Jede normale Körpererweiterung ist Zerfällungskörper eines Polynoms.

(b) Wenn L/K endliche Galoiserweiterung ist und F ein Zwischenkörper, dann ist F/K galois.

(c) Jede algebraische Erweiterung von $\mathbb{F}_p$ ist separabel. 6P.

4.) Sei G eine Gruppe, $N \subset G$ die Untergruppe, die von den Elementen der Form $ghg^{-1}h1{-}1$ für $g, h \in G$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler ist und G/N eine abelsche Gruppe. 6P.

5.) Sei $P = X^6 - 25, L$ der Zerfällungskörper von P über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie: $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \zeta_3)$ für eine primitive 3-te Einheitswurzel ζ_3. Bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}]$ und die Ordnung von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$. Ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ abelsch? Ist $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ auflösbar? Begründen Sie Ihre Antworten. 14P.

6.) Sei K ein Körper, E ein Zwischenkörper von $K(X)/K$ ungleich K. Zeigen Sie:

(a) $[K(X) : E] < \infty$.

(b) E/K ist transzendent. 8P.

Gesamtpunktzahl: 42
mit 17 Punkten ist die Klausur bestanden