1. Aufgabe

Bestimmen Sie die Grade der folgenden Körpererweiterungen:

(a) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+3]|\mathbb{Q}$,

(b) $\mathbb{R}[\pi]|\mathbb{R}$,

(c) $\mathbb{Q}(T)[\mathrm{i}]|\mathbb{Q}(T)$, T Unbestimmte ($\mathbb{Q}(T)$ ist Teilkörper von $\mathbb{C}(T)$).

2. Aufgabe

Zeign Sie, dass folgende Polynome in den jeweils angegebenen Ringen irreduzibel sind (X, Y seien Unbestimmte):

(a) $X^4 + 3X^2 + 6X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$,

(b) $X^5 + X^2Y + 2Y \in \mathbb{Z}[X, Y]$,

(c) $X^3 - (1+\mathrm{i})X + 1 - \mathrm{i} \in \mathbb{G}[X]$ ($\mathbb{G}$: Ring der ganzen Gaußschen Zahlen).

3. Aufgabe

Sei R ein euklidischer Ring mit euklidischer Funktion $\mu : R\backslash\{0_R\} \to \mathbb{N}$ und sei $m := \min\{\mu(r) : r \in R\backslash\{0_R\}\}$.
Zeigen Sie, dass $x \in R^*$ für alle $x \in R\backslash\{0_R\}$ mit $\mu(x) = m$.

4. Aufgabe

Ein Ring R heißt reduziert, wenn nil $R = 0$, d. h. wenn für alle $x \in R\backslash\{0_R\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x^n \neq 0_R$.
Sei R ein Ring und X Unbestimmte. Zeigen Sie:

(a) Ist R reduziert, so ist jeder Unterring von R ebenfalls reduziert.

(b) R ist genau dann reduziert, wenn $R[X]$ reduziert ist.

5. Aufgabe (Zusatzaufgabe)

Sei R ein Ring.

(a) Zeigen Sie, dass R genau dann ein Körper ist, wenn R außer dem Nullideal $\{0_R\}$ und den Einheitsideal R keine weiteren Ideale besitzt.

(b) Sei I ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass I genau dann maximales Ideal von R ist, wenn R/I ein Körper ist.