
Satz 3.14: Satz über die Invarianz der Ordnungsrelation auf Viergeraden von Verschiebungen:

Die Ebene \( \mathcal{E} \) erfüllt die Axiome (A1) - (A8).

Ist \((g, \prec)\) eine orientierte Gerade und \( \tau: \mathcal{E} \to \mathcal{E} \) eine Verschiebung mit \( \tau(g) = g \), so folgt für alle \( A, B \in g \) mit \( A \prec B \) auch \( \tau(A) \prec \tau(B) \).

Beweis:

Gebe ohne Einschränkung \( \tau \neq \text{id}_\mathcal{E} \).

Wir konstruieren zunächst ein spezielles linkstapesor \((A_0, B_0)\) mit der behaupteten Eigenschaft.

Sei \( x_0 \in g \) beliebig. Nach Axiom (A7) gibt es dann ein \( y_0 \in g \) mit \( \tau(\{x_0, y_0, \tau(x_0)\}) \).

Weiter sei \( x_1 \in E \setminus g \) beliebig, und sei \( \tau_1: E \to E \) die Verschiebung mit \( \tau_1(x_0) = x_1 \).

Setze \( g_1 := g(\{x_0, \tau_1(x_0)\}) \) und \( g_2 := g(\{x_1, \tau_1(x_0)\}) \).

Skizze:
Weil \( g(X_0, T(X_0)) \) nicht parallel zu \( g_2 \) ist, sind
\( g_1 = g(X_0, T(X_0)) \) und \( g_2 \) nach Satz 2.4.1 ebenfalls nicht parallel, sei \( X \) der Schnittpunkt von \( g_1 \) und \( g_2 \).

Axiom (A8) und \( \pi(x, x, T(x)) \) liefern wegen \( g(X_0, X) \parallel g_1 \) auch: \( \pi(x, x, T(X_0)) \).

Darin liefert erneute Anwendung von Axiom (A8) wegen \( T_1(g) \parallel g \): \( \pi(x, x, T_1(x, x, T(X_0))) \).

Satz 2.4.1, angewandt auf \( T_1 \), liefert \( g_2 \parallel g(T_1(X_0), T(X_0)) \) und daher ergibt sich durch erneute Anwendung von Axiom (A8):
\[ \pi(x, x, T_2(x, T(X_0), T(X_0))) \].

Ist also \( X_0 < Y_0 \), so folgt insgesamt
\[ X_0 < Y_0 < T(X_0) < T(Y_0) \],
und das Paar \( (A_0, B_0) = (X_0, Y_0) \) erfüllt die Ungleichungen \( A_0 < B_0 \) und \( T(A_0) < T(B_0) \).

Ist andernfalls \( Y_0 < X_0 \), so folgt
\[ T(Y_0) < T(X_0) < Y_0 < X_0 \],
und wir setzen \( (A_0, B_0) = (Y_0, X_0) \).

Lind nun \( X_0, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \in g \) mit
\[ X_1 < X_2 < A_0 < X_3 < X_4 < B_0 < X_5 < X_6 \],
so liefert wiederholte Anwendung von Satz 3.1.3:
\[ T(X_1) < T(X_2) < T(A_0) < T(X_3) < T(X_4) < T(B) < T(X_5) < T(X_6) \].

Also ist \( T(A) < T(B) \) für alle \( A, B \in g \) mit \( A < B \).

Im folgenden erfüllt die Ebene \( E, g_1 \) die Axiome (A1) - (A8).
Definition 3.15: Strahlen und Strecken:

i) Für eine orientierte Gerade $g$, $<1$ in $(E, G_1)$ und $A \in g$ sind die beiden abgeschlossenen Strahlen mit Anfangspunkt $A$ und Trägergerade $g$ gegeben durch

$$s_1 = \{ P \in g \mid A \leq P \} \quad \text{und} \quad s_2 = \{ Q \in g \mid Q \leq A \}.$$ 

Für $P \in s_1 \setminus [A]$ und $Q \in s_2 \setminus [A]$ schreiben wir auch

$$s_1 = \lambda(A, P) = AP^+ = AQ^-,$$

$$s_2 = \lambda(A, Q) = AQ^+ = AP^-.$$

$s_1$ und $s_2$ heißen zueinander entgegengesetzte Strahlen.

ii) Für $A, B \in E$ mit $A \neq B$ ist die Strecke $AB$ definiert durch

$$AB := \{ P \in g \mid A, B \mid \} = [A, B].$$

$A$ und $B$ heißen die Endpunkte der Strecke $AB$.


Bemerkung 3.16:

 Sind $s_1, s_2$ entgegengesetzte Strahlen mit Anfangspunkt $A$ und Trägergerade $g$, so gilt:

$$s_1 \cap s_2 = [A], \quad s_1 \cup s_2 = g.$$ 

Zwei Punkte $P, Q \in g \setminus [A]$ gehören genau dann den verschiedenen Strahlen $s_1, s_2$ an, wenn $\{P, A, Q\}$ gilt.
Korollar 3.17:
finden $g_1, g_2, g_3$ paarweise verschiedene parallele Geraden in $\mathbb{E}$, so schreiben wir $\angle(g_1, g_2, g_3)$, falls für eine - und damit nach Sätzen 3.17 für jede - Gerade $g \in \mathbb{E}$, die nicht zu $g_1, g_2, g_3$ parallel ist, gilt:
im $S_i$ für $1 \leq i \leq 3$ der Schnittpunkt von $g$ mit $g_i$, so gilt $\angle(S_1, S_2, S_3)$.

Satz 3.18, der Satz von Pasch:
sei $g \in \mathbb{E}$ und seien $A, B, C \in \mathbb{E} \setminus g$ paarweise verschieden. Dann schneidet $g$ entweder genau zwei oder gar keine der drei Strecken $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$.

Beweis:
setze $g_1 := g(\overline{A, B}), g_2 := g(\overline{A, C}), g_3 := g(\overline{B, C})$.
Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $g$ ist zu einer der Geraden $g_1, g_2, g_3$ parallel, etwa $g \parallel g_3$.
Wegen $A, B, C \in \mathbb{E} \setminus g$ ist $g \cap g_3 = \emptyset$, also auch $g \cap BC = \emptyset$.

Skizze

[Diagramm]

$g_1 \parallel g_2$
Sind $A, B, C$ E $\mathbb{E}$ nicht in einer Geraden liegend, so ist nichts mehr zu zeigen.

Andernfalls besitzt $g$ mit $g_1$ bzw. $g_2$ genau einen Schnittpunkt $S_1$ bzw. $S_2$.
Nach Axiom (AB) gilt nun folgende Kette von Äquivalenzumformungen:

$S_1 \in AB \iff \exists u (A, S_1, B) \iff \exists v (A, S_2, C) \iff S_2 \in AC$

Damit folgt in diesem Fall die Behauptung.

2. Fall: $g$ ist in keiner der Geraden $g_1, g_2, g_3$ parallel.

Liegen $h_1$ bzw. $h_2$ bzw. $h_3$ die Parallelen zu $g$ durch $A$ bzw. $B$ bzw. $C$. Dann ist $h_1 \parallel h_2 \parallel h_3 \parallel h_4$.
Gilt $\exists v (h_1, h_2, h_3)$.
Weiter gilt wegen $(A, B, C) = \emptyset$ genau einer der folgenden 4 Fälle:

i) $\exists w (g, h_1, h_2)$
ii) $\exists v (h_1, g, h_2)$
iii) $\exists v (h_2, g, h_3)$
iv) $\exists v (h_2, h_3, g)$

Gilt i) oder iv), so schneidet $g$ keiner der drei Strecken $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$.
Gilt iii, so schneidet \( g \) die beiden Strecken \( AB \) und \( AC \), aber \( BC \) nicht.

Gilt iii, so schneidet \( g \) die beiden Strecken \( BC \) und \( AC \), aber \( AB \) nicht.

**Fakt und Definition 3.19:**

Es sei \( g \in G \). Dann ist auf \( E \setminus g \) eine Äquivalenzrelation \( \sim \) gegeben durch:

\[(H) \quad A \sim B \iff \overline{AB} \cap g = \emptyset.\]

Die Äquivalenzrelation \( \sim \) enthält genau zwei Äquivalenzklassen \( H_1, H_2 \); sie heißen die zu \( g \) gehörigen offenen Halbebenen.

Wir sagen auch: \( g \) trennt die zueinander entgegengesetzten offenen Halbebenen.

\( H_1 := H_1 \cup \overline{g} \) und \( H_2 := H_2 \cup \overline{g} \) heißen die zugehörigen abgeschlossenen Halbebenen.

**Beweis:**

Klar ist: \( \sim \) ist reflexiv und symmetrisch.

Legen nun \( A, B, C \in E \setminus g \) paarweise verschieden mit \( A \sim B \) und \( B \sim C \). Dann schneidet \( g \) die Strecken \( \overline{AB} \) und \( \overline{BC} \) nicht. Nach Fakt 3.18 ist also auch \( \overline{AC} \cap g = \emptyset \) und damit \( A \sim C \).

 Folglich ist \( \sim \) eine Äquivalenzrelation.

Ist \( A \in E \setminus g \) und \( B \in g \), so gilt es nach Axiom (A7) ein \( B \in g \) mit \( \exists \alpha(\alpha, A, B) \), und damit ist \( \overline{AB} \cap g = \emptyset \).

\( A \) und \( B \) gehören also zu zwei verschiedenen Äquivalenzklassen.
Es kann aber keine dritte Äquivalenzklasse geben, denn sonst gäbe es ein $C \cap g \neq \emptyset$ mit $A \cap g \neq \emptyset$ und $B \cap g \neq \emptyset$. Das ist aber nach Satz 3.18 nicht möglich.

**Satz 3.20:**

Für vier paarweise verschiedene nicht kollineare Punkte $A, B, C, D \in E$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. Es gibt zwei parallele Geraden $g_1, g_2 \in G$ und zwei parallele Geraden $h_1, h_2 \in G$ mit
   \[ g_1 \cap h_1, g_2 \cap h_2, g_1 \cap h_2, g_2 \cap h_1 \]
2. Es gibt eine Verschiebung $\tau : E \rightarrow E$ mit:
   \[ \tau(A) = B \quad \text{und} \quad \tau(D) = C. \]

**Beweis:** Siehe Aufgabe 9.

**Skizze**

\[ \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
A & B & C \\
D & & \end{array} \\
\begin{array}{ccc}
g_1 & h_1 & g_2 \\
& h_2 & \end{array}
\end{array} \]

**Definition 3.21:**

Vier paarweise verschiedene nicht kollineare Punkte $A, B, C, D \in E$ bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms, falls die beiden äquivalenten Bedingungen in Satz 3.20 gelten.
die Strecken $AB, BC, CD, DA$ heißen die Seiten, die Strecken $AC, BD$ die Diagonalen des Parallelogramms.

Satz 3.22, Satz vom Diagonalschnittpunkt:
Sind $A, B, C, D$ wie in Definition 3.21, so haben die Diagonalen $AC, BD$ des zugehörigen Parallelogramms genau einen Schnittpunkt.
Beweis:

Skizze

sei $T: E \to E$ die Verschiebung mit $T(A) = B$ und $T(D) = C$

Setze $B' = T(B)$

Nach Satz 3.14 gilt: $2w(A, B, B')$.

(Weil etwa $A < B$, so auch $B = T(A) < T(B) = B'$.)

$A, B'$ liegen also bezüglich $g(B, D)$ in verschiedenen Halbebenen. Nach Satz 3.20 sind auch $B, B', C, D$ die Eckpunkte eines Parallelogramms, wobei gilt:

$g(B, D) \parallel g(B', C)$

 Folglich liegen $B', C$ bezüglich $g(B, D)$ in der gleichen Halbebene, daher liegen $A, C$ bezüglich $g(B, D)$ in verschiedenen Halbebenen, das heißt:

$AC \cap g(B, D) \neq \emptyset$.

Vollig analog folgt: $g(A, C) \cap BD \neq \emptyset$.

Weiter folgt nun $g(A, C) \cap g(B, D) = AC \cap g(B, D) = g(A, C) \cap BD$ und daher:

$AC \cap BD \neq \emptyset$. 