Analysis 1

Weihnachtsserie 10
Abgabe: 04.01. in den Briefkästen im Raum A514
Alle auf dieser Serie erreichbaren Punkte sind Zusatzpunkte!

Aufgabe 1 (Punkte: 2+2+2). Sei (X, d_1) ein metrischer Raum und

$$d_2(x,y) = \frac{d_1(x,y)}{2 + d_1(x,y)} \text{ für } x, y \in X.$$

(a) Zeige d_2 ist eine Metrik auf X.

(b) Zeige

$$\lim_{n\to\infty} d_1(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d_2(x_n, x) = 0.$$

(c) Sei $f(y) = d_1(x, y)$. Ist f eine stetige Funktion auf (X, d_2)?

Aufgabe 2 (Punkte: 4+4). Man untersuche die folgenden Mengen auf Abgeschlossenheit, Offenheit, Kompaktheit und Zusammenhang!

(a) $\Omega_1 = \big([0,2] \setminus (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})\big)^2$

(b) $\Omega_2 = \big([0,2] \setminus [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]\big)^2$

Aufgabe 3 (Punkte: 2+2+2). Es sei

$$\Omega = (0,1) \setminus \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} [n2^{-k} - 5^{-k-1}, n2^{-k} + 5^{-k-1}].$$

(a) Was sind die Häufungspunkte von Ω?

(b) Was sind die inneren Punkte von Ω?

(c) Ist Ω kompakt oder zusammenhängend?

Aufgabe 4 (Punkte: 4). Sei $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear. Zeige, es gibt ein $\lambda_0 > 0$, sodass die Folge der Abbildungen

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 B)^k$$

gleichmäßig auf $\|x\| < 1$ konvergiert.

Aufgabe 5 (Punkte: 6). Sei $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv und linear und $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Zeige, es gibt ein $\lambda_0 > 0$, sodass für jedes $\lambda < \lambda_0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda A^{-1} B)^k (x) \to C_\lambda(x).$$

Zeige C_λ ist eine lineare Abbildung und

$$(A + \lambda B) C_\lambda = A.$$

Folgere, dass $A + \lambda B$ bijektiv ist.

Aufgabe 6 (Punkte: 3+3+3+3). Untersuche, ob die Funktionenfolgen gleichmäßig konvergieren, ob $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existiert und falls ja, ob die Funktion f stetig ist.

(a) $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \min(1, nx)$

(b) $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \max(1, x - n)$

(c) $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \max(1, x - \frac{1}{n})$

(d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \max(-1, \min(1, nx))$.

Aufgabe 7 (Punkte: 4). Seien (X_i, d_i) metrische Räume und $X = \prod_{i\in I} X_i$ sowie

$$d(f, g) = \sup \{\min(d_i(f_i, g_i), 1), i \in I\}.$$

Zeige d ist eine Metrik auf X.

Aufgabe 8 (Punkte: 4). Sei jetzt $I = Y$, wobei (Y, d_Y) und (X, d_X) metrische Räume sind. Zeige, bezüglich d definiert wie in Aufgabe 7 ist die Menge

$$M = \{f : Y \to X \mid f \text{ ist stetig}\}$$

abgeschlossen in $X^Y = \prod_{y\in Y} X$.

Aufgabe 9 (Punkte: 4+2+2). Sei $a_m \in \mathbb{R}^+$ eine monotone Nullfolge und

$$M_z = \left\{ \sum_{m\in I} a_m z^m \mid I \,\text{endlich} \right\}$$

mit $z \in \mathbb{C}$. Zeige, falls $\sum_{m=0}^{\infty} a_m = \infty$

(a) es gibt ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, sodass $2i - 2$ Häufungspunkt von M_z ist.

(b) $\sum_{m=0}^{n} a_m z^m = f_n(z)$ konvergiert gleichmäßig in $\{|z| \le r\}$ für $r < 1$.

(c) $f_n(z)$ konvergiert nicht für $|z| > 1$.

Aufgabe 10 (Punkte: 4+2+2+2+4+4)**.** Untersuche die Folgen auf Konvergenz und bestimme, wenn möglich, den Grenzwert!

(a)
$$a_0 = 3,\ a_{n+1} = 10a_n^{\frac{4}{5}} - 4a_n.$$

(b)
$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}.$$

(c)
$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{1+a_n^2}.$$

(d)
$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}.$$

(e)
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2+3k+1}{k^3 \cdot (k+1)^3}.$$

(f)
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{6^k}{(3^{k+1}-2^{k+1})(3^k-2^k)}.$$

Aufgabe 11 (Punkte: 2+2)**.** Untersuche die Funktionen auf Stetigkeit!

(a)
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(a,b) = \max(a,b).$$

(b)
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } x = \pm 1 \\ \frac{x^2-x}{x^2-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$