Übungsaufgaben Wahrscheinlichkeitstheorie II

Prof. Dr. B. Fritzsche - Wintersemester 2017/2018

Serie II - Abgabe am 25.10.2017 bis spätestens 13.15 Uhr

II-1. Sei $\eta \in (0, +\infty)$. Zeigen Sie, dass für die Exponentialverteilung E_n zum Parameter η folgende Aussagen gelten:

(a) Die rechte Verteilungsfunktion $F_{E_\eta,r}$ von E_η und die linke Verteilungsfunktion $F_{E_\eta,l}$ von E_η stimmen überein und für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in (-\infty, 0] \\ 1 - \exp(-\eta x) & \text{, falls } x \in (0, +\infty) \end{cases} .$$

(b) Es ist $g_\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gemäß

$$g_\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in (-\infty, 0] \\ -\frac{1}{\eta} \ln x & \text{, falls } x \in (0, +\infty) \end{cases} .$$

Weiterhin bezeichne $\mu_{(0,1)}$ die kontinuierliche Gleichverteilung auf dem Intervall $(0, 1)$. Begründen Sie, dass g_η eine $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung ist und

$$g_\eta(\mu_{(0,1)}) = E_\eta$$

gilt.

II-2. Seien I ein Intervall von $\overline{\mathbb{R}}$ und $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ monoton nichtfallend oder monoton nichtwachsend in I. Zeigen Sie, dass f dann $(\overline{\mathfrak{B}}_1 \cap I) - \overline{\mathfrak{B}}_1$-messbar ist.

II-3. Geben Sie ein Beispiel (mit Begründung) dafür an, dass es einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und eine μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derart gibt, dass für jedes $p \in (1, +\infty)$ deren p-te Potenz f^p nicht μ-integrierbar ist.