5.Übung zur Vorlesung Analysis

für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Freitag, 10.11.2017
Abgabe: Freitag, 17.11.2017 bis **spätestens** 12:00 Uhr im Postfach Hardtke im Raum A 514 oder im Anschluß an die Donnerstagsvorlesung (verspätete Abgaben werden nicht bewertet).

Wichtig: Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen **selbstständig** bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz (mit Begründung):

$(a)\quad \sum_{k=1}^{\infty} k2^{-k}$

$(b)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2+1}$

$(c)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}}$

$(d)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+5k+1}$

(Es ist nicht verlangt, im Falle von Konvergenz den Grenzwert zu bestimmen.)

Aufgabe 2 (3+1 Punkte)**.**
1) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4k^2-1}.$$

Aufgabe 3 (1+1+1+1 Punkte). Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz (mit Begründung):

$$(a)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2}{k^3+k} \qquad\qquad (b)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k+1]{k^2}}$$

$$(c)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k+1} \qquad\qquad (d)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k!} 4^k$$

(Es ist nicht verlangt, im Falle von Konvergenz den Grenzwert zu bestimmen.)

Aufgabe 4 (2+2 Punkte).
1) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x_1, \dots, x_n \geq 0$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right)^2 .$$

2) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sei konvergent. Zeigen Sie, dass auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ konvergiert mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \right)^2 .$$