Übungsblatt 4

1) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, wir definieren

$$\mathfrak{M} = \{M \subset X \,:\, \exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset M \subset B \text{ und } \mu(B \setminus A) = 0\},$$

sowie $\tilde{\mu}M = \mu A$ wenn $A, B \in \mathcal{A} : A \subset M \subset B$ und $\mu(B \setminus A) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{M}$ eine σ-Algebra auf X ist und dass $\mathfrak{M} \supset \mathcal{A}$.

b) Beweisen Sie, dass $\tilde{\mu}$ ein (wohldefiniertes!) Maß auf $\mathfrak{M}$ ist und dass $\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}} = \mu$.

c) Zeigen Sie, dass $(X, \mathfrak{M}, \tilde{\mu})$ ein *vollständiger* Maßraum ist, d.h. wenn $M \in \mathfrak{M}$ und $\tilde{\mu}(M) = 0$, dann gilt für alle $N \subset M$, dass $N \in \mathfrak{M}$ und $\tilde{\mu}(N) = 0$.

3+3+2 Punkte

2) Auf der Menge X betrachten wir die diskrete Metrik

$$\varrho_d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Ist (X, ϱ_d) ein vollständiger Raum? Charakterizieren Sie, wann (X, ϱ_d) separabel, total beschränkt bzw. beschränkt ist. Begründen Sie Ihre Aussagen. 4 Punkte

3) Auf dem metrischen Raum (X, ϱ) sei eine unbeschränkte stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben. Konstruieren Sie eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung hat.

Nun sei ein stetiges $g : X \to (0, 1)$ gegeben, dass kein Minimum annimmt. Konstruieren Sie wiederum eine offene Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung hat.

3+2 Punkte.

Abgabe am 08.11.2017, 9.10 Uhr Hörsaal 5

Die Übungsscheinklausur findet am 6.2.2017 von 9.15-10.45 9m FKH statt.