

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 9

Lösungen bitte zur Übung am 8. Dezember 2017 mitbringen

Aufgabe 33 (Hopfsches Lemma). Sei $B = B(0, R)$. Sei

$$Lu := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_{ij}u + \sum_{i=1}^n b_i(x) D_i u + c(x)u,$$

ein gleichmäßig elliptischer Operator in B (siehe Aufgabe 17), wobei $a_{ij}, b_i, c \in C(\bar{B})$, $a_{ij} = a_{ji}$ und $c(x) \leq 0$. Seien $u \in C^2(B) \cap C^1(\bar{B})$, $x_0 \in \partial B$. Beweisen Sie, dass, falls $-Lu \leq 0$ in B , $u(x) < u(x_0)$ für alle $x \in B$ und $u(x_0) \geq 0$, dann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 17 und den Beweis von Satz 17 aus der Vorlesung.

Lösung. O.B.d.A. sei $R = 1$. Sei

$$v(x) := e^{-\alpha|x|^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Eine einfache Berechnung gibt

$$Lv(x) = e^{-\alpha|x|^2} \left[4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) x_i x_j - 2\alpha \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(x) + b_i(x) x_i \right) + c(x) \right].$$

Sei $E := B(0, 1) \setminus \overline{B(0, 1/2)}$. Da L gleichmäßig elliptisch ist (siehe Aufgabe 17), für $x \in E$ haben wir

$$\begin{aligned} Lv(x) &= e^{-\alpha|x|^2} \left[4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) x_i x_j - 2\alpha \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(x) + b_i(x) x_i \right) + c(x) \right] \\ &\geq e^{-\alpha|x|^2} \left[4\alpha^2 \lambda |x|^2 - 2\alpha \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(x) + b_i(x) x_i \right) + c(x) \right] \\ (\text{da } 1/2 < |x| < 1) &\geq e^{-\alpha} \left[\alpha^2 \lambda - 2\alpha \left(\sum_{i=1}^n \max_{\bar{E}} |a_{ii}| + \max_{\bar{E}} |b_i| \right) - \max_{\bar{E}} |c| \right]. \end{aligned}$$

Von der letzten Ungleichung kann man folgern, dass $Lv(x) \geq 0$, für alle $x \in E$, falls α groß genug gewählt wird (abhängig nur von a_{ij}, b_i, c), da

$$\alpha^2 \lambda - 2\alpha \left(\sum_{i=1}^n \max_{\bar{E}} |a_{ii}| + \max_{\bar{E}} |b_i| \right) - \max_{\bar{E}} |c| \rightarrow +\infty \quad \text{mit } \alpha \rightarrow +\infty.$$

In anderen Wörtern, wir können $\alpha > 0$ finden, so dass $-Lv \leq 0$ in E . Betrachten wir jetzt die Funktion $u + \varepsilon(v - v(x_0))$ in E , wobei ε wird später festgelegt. Es gilt

$$-L(u + \varepsilon(v - v(x_0))) \leq 0$$

in E . Außerdem, da $v(x) - v(x_0) \geq 0$ für alle $x \in E$, hat die Funktion $u + \varepsilon(v - v(x_0))$ ein nichtnegatives Maximum in $\bar{E}$. Deswegen können wir das schwache Maximumprinzip für den Operator L in E verwenden (siehe Aufgabe 17) und wir erhalten

$$\max_{\bar{E}} [u + \varepsilon(v - v(x_0))] \leq \max_{\partial E} [u + \varepsilon(v - v(x_0))]. \quad (\text{f})$$

Der Rand von E ist $\partial E = \partial B(0, 1) \cup \partial B(0, 1/2)$. Für $x \in \partial B(0, 1)$ haben wir

$$u(x) + \varepsilon(v(x) - v(x_0)) = u(x) \leq u(x_0),$$

da $v(x) = v(x_0)$. Für $x \in \partial B(0, 1/2)$ haben wir

$$u(x) + \varepsilon(v(x) - v(x_0)) \leq u(x) + \varepsilon[e^{-\alpha/4} - e^{-\alpha}] \leq u(x_0),$$

falls $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt wird, da $u(x) < u(x_0)$ für alle $x \in \partial B(0, 1/2)$ und dann auch

$$\max_{\partial B(0, 1/2)} u < u(x_0).$$

Dank (f), haben wir dann

$$u(x) + \varepsilon(v(x) - v(x_0)) \leq u(x_0) \quad (\text{g})$$

für alle $x \in E$. Sei jetzt $x \in E$, so dass x auf der Strecke zwischen 0 und x_0 liegt. Dank (g) können wir schreiben

$$\frac{u(x_0) - u(x)}{|x_0 - x|} \geq \varepsilon \frac{v(x) - v(x_0)}{|x - x_0|}.$$

Wir können jetzt den Limes mit $x \rightarrow x_0$ berechnen und wir kriegen

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq \varepsilon \left[-\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) \right] > 0,$$

da die äußere Normalableitung von v auf $\partial B(0, 1)$ negativ ist und $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 34 (Starkes Maximumprinzip für elliptische Operatoren). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend und L wie in Aufgabe 33. Sei $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$. Beweisen Sie das starke Maximumprinzip: falls $-Lu \leq 0$ und $\max_{\bar{U}} u \geq 0$, dann gilt entweder

- (i) $u(x) < \max_{\partial U} u$ für alle $x \in U$, oder
- (ii) $u = \text{konst.}$ in U .

Hinweis: verwenden Sie das Hopfsche Lemma.

Lösung. Sei $M := \max_{\bar{U}} u$ und

$$E := \{x \in U : u(x) = M\}.$$

Falls $E = \emptyset$, dann (i) gilt. Nehmen wir dann an, dass $E \neq \emptyset$ und versuchen, zu beweisen, dass $E = U$, indem wir beweisen, dass E sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

E ist abgeschlossen (in U), da u stetig ist. Beweisen wir jetzt, dass E offen ist. Wir wollen zeigen: für alle $x \in E$ existiert ein $r > 0$ so, dass $B(x, r) \subseteq E$. Sei $x \in E$ und sei $r > 0$ so dass $\overline{B(x, 2r)} \subseteq U$. Es gibt zwei Fälle:

1. Für alle $y \in B(x, r)$, $u(y) = M = u(x)$. In diesem Fall, $B(x, r) \subseteq E$ und das ist, was wir beweisen wollten.
2. Es gibt $y \in B(x, r)$ so, dass $u(y) < M$. Betrachten wir dann die Menge

$$\{\rho \geq 0 : u(z) < M \text{ für alle } z \in B(y, \rho)\}.$$

Diese Menge ist nicht leer, da $u(y) < M$ und sie ist beschränkt, da $x \in B(y, r)$ und $u(x) = M$. Sei

$$\bar{r} := \sup\{\rho \geq 0 : u(z) < M \text{ für alle } z \in B(y, \rho)\}.$$

Sei $B := B(y, \bar{r})$. Es gilt $\bar{B} \subseteq \overline{B(x, r)} \subseteq U$, $u(z) < M$ für alle $z \in B$ und $u(z_0) = M$ für ein $z_0 \in \partial B$. Der Punkt z_0 ist ein inneres Maximum von u und deswegen $Du(z_0) = 0$. Aber das Hopfsche Lemma gibt $\partial u / \partial \nu(z_0) > 0$, ein Widerspruch.

Aufgabe 35 (Hadamards Einwand gegen Dirichlet). Sei $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitskreisscheibe, und $f \in C^0(\partial B(0, 1))$ definiert durch

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos(2^{2n}\theta).$$

Finden Sie die Lösung u des Dirichletproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } B_1(0), \quad u = f \quad \text{auf } \partial B_1(0)$$

und zeigen Sie, dass

$$\int_{B_1(0)} |Du|^2 = \infty.$$

Hinweis: verwenden Sie Polarkoordinaten und die Identität von Parseval: für eine stetige 2π -periodische Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Fourierreihe $f(\theta) = \sum_k c_k e^{ik\theta}$ gilt

$$\sum_k |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 d\theta.$$

Aufgabe 36. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend, mit $\partial U \in C^1$ und sei $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ harmonisch in U . Nehmen wir an, dass $x_0 \in \partial U$, $r > 0$ existieren so, dass

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial U \cap B,$$

wobei $B = B(x_0, r)$. Beweisen Sie, dass $u \equiv 0$ in U .
Hinweise. 1. Betrachten Sie

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in B(x_0, r) \cap \bar{U}, \\ 0 & x \in B(x_0, r) \setminus U, \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass $\Delta \bar{u} = 0$ in $\mathcal{D}'(B)$, d.h. $\int_B \bar{u} \Delta \varphi = 0$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(B)$.

2. Benutzen Sie Regularisierung, zu zeigen, dass $\bar{u}$ die Mittelwerteigenschaft hat.
3. Folgern Sie daraus, dass $\bar{u} \in C^2(B)$ und $\Delta \bar{u} = 0$.

Lösung. Es fehlte noch zu beweisen, dass

$$v \in C(U) \text{ und } \Delta v = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(U) \implies u \text{ glatt und harmonisch.}$$

Wir beweisen, dass für alle $x_0 \in U$ existiert ein $r > 0$ so, dass für alle $\rho < r$ die Mittelwerteigenschaft

$$v(x_0) = \oint_{B(x, \rho)} v(x) dx, \quad (\text{h})$$

gilt. Das ist hinreichend, da die Mittelwerteigenschaft impliziert, dass u glatt und harmonisch ist (siehe den Satz 20 aus der Vorlesung). Sei $x_0 \in U$ und sei $r > 0$ so, dass $\overline{B(x_0, 2r)} \subseteq U$. Sei $B := B(x_0, r)$. Sei ρ ein Glättungskern, d.h.

$$\rho \in C_c^\infty(B(0, 1)), \quad \rho \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1,$$

und sei $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$. Die Faltung

$$v_\varepsilon(x) := (v * \rho_\varepsilon)(x) := \int_{B(x, \varepsilon)} v(y) \rho_\varepsilon(x - y) dy = \int_{B(0, \varepsilon)} v(x - y) \rho_\varepsilon(y) dy$$

ist wohldefiniert für $x \in B$ und $\varepsilon < r$, da $B(x, \varepsilon) \subseteq \overline{B(x_0, 2r)} \subseteq U$. Allgemeine Eigenschaften von Glättungskernen sind:

- $v_\varepsilon \rightarrow v$ gleichmäßig in jedem kompakten Menge $K \subseteq B$;
- $v_\varepsilon \in C^\infty$.

Wir beweisen jetzt, dass $\Delta v_\varepsilon = 0$ in $\mathcal{D}'(B)$. Sei $\varphi \in C_c^\infty(B)$. Wir haben

$$\begin{aligned} \int_B v_\varepsilon(x) \Delta \varphi(x) dx &= \int_B \int_{B(0, \varepsilon)} v(x - y) \rho_\varepsilon(y) \Delta \varphi(x) dy dx \\ &= \int_{B(0, \varepsilon)} \rho_\varepsilon(y) \int_B v(x - y) \Delta \varphi(x) dx dy \\ (x' = x - y) &= \int_{B(0, \varepsilon)} \rho_\varepsilon(y) \int_{B - y} v(x') \Delta \varphi(x' + y) dx' dy. \end{aligned} \quad (\text{i})$$

Wir bemerken jetzt, dass $\varphi_y(x') := \varphi(x'+y) \in C_c^\infty(B-y)$. Da $|y| < \varepsilon$, $B-y \subseteq U$, und dann $\varphi_y \in C_c^\infty(U)$. Außerdem, $\Delta\varphi_y(x') = \Delta\varphi(x'+y)$. Es gilt dann

$$\int_{B-y} v(x') \Delta\varphi(x'+y) dx = \int_U v(x') \Delta\varphi_y(x') dx' = 0,$$

da $\Delta v = 0$ in $\mathcal{D}'(U)$. Aus der Berechnung in (i), erhalten wir dann, dass $\Delta v_\varepsilon = 0$ in $\mathcal{D}'(B)$. Wir verwenden jetzt die Tatsache, dass

v_ε harmonisch im Sinne der Distributionen und glatt $\implies$ harmonisch (im klassischen Sinne).

Deshalb hat v_ε die Mittelwerteigenschaft:

$$v_\varepsilon(x_0) = \int_{B(x_0,\rho)} v_\varepsilon(x) dx,$$

für alle $\rho < r$. Wir können jetzt den Limes $\varepsilon \rightarrow 0$ nehmen und erhalten (h).