

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 1

Lösungen bitte zur Übung am 13. Oktober 2017 mitbringen

Aufgabe 1 (Trennung der Variablen). Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

auf $(x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+$, die von der Form $u(x, t) = v(x)w(t)$ sind und die „Randbedingung“ $u(0, t) = u(1, t) = 0$ erfüllen. Finden Sie im Anschluss eine Folge u_k von solchen Lösungen, so dass

$$u_k(x, 0) = 0, \\ \sup_x \left| \frac{\partial u_k}{\partial t}(x, 0) \right| \rightarrow 0 \text{ mit } k \rightarrow \infty,$$

aber $u_k(\frac{1}{2}, 1) \rightarrow 1$. Dies bedeutet, dass das Cauchy Problem für (1) nicht wohlgestellt ist.

Aufgabe 2 (Die Black-Scholes Gleichung). Betrachten Sie die Black-Scholes Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2)$$

für den Wert einer europäischen Option $V = V(S, t)$ für $S \in (0, \infty)$ und $0 \leq t \leq T$. Zeigen Sie, dass mit der Variablentransformation $(S, t) \mapsto (x, \tau)$ und $V(S, t) \mapsto u(x, \tau)$, wobei

$$t = T - \tau, \\ S = Ke^{x + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\tau}, \\ V = e^{-r\tau}u,$$

die Gleichung (2) in die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

transformiert wird. Was ist der Definitionsbereich von u und der Anfangswert $u(x, 0)$?

Aufgabe 3 (Harmonische Polynome). Eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *harmonisch* (auf $\mathbb{R}^n$) falls

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

- (a) Finden Sie alle homogenen, harmonischen Polynome zweiter Ordnung auf $\mathbb{R}^2$.
- (b) Existieren (nicht verschwindende) homogene, harmonische Polynome (auf $\mathbb{R}^2$) beliebiger Ordnung?
- (c) Falls ja, zeigen Sie, dass die homogenen, harmonischen Polynome mit einer bestimmten Ordnung ein Vektorraum bilden, wobei wir das Nullpolynom als homogenes Polynom beliebiger Ordnung betrachten. Berechnen Sie seine Dimension.

Aufgabe 4 (Orthogonale Transformationen). (a) Sei $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion und $O \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $O^T O = I$, wobei I die Identitätsmatrix ist. Beweisen Sie, dass $v(x) := u(Ox)$ harmonisch ist.

- (b) Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit dieser Eigenschaft: für alle harmonischen Funktionen $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ist $v \circ T$ auch harmonisch. Zeigen Sie, dass $T = aO$ mit $a \in \mathbb{R}$ und O eine orthogonale lineare Abbildung ist.