Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Prof. Dr. László Székelyhidi
Dr. Stefano Modena

WS2017/18

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 7
Lösungen bitte zur Übung am 24. November 2017 mitbringen

Aufgabe 25. Sei $u \in C^2(B(0,R))$ harmonisch und nicht-negativ. Zeigen Sie die folgende Version der Harnack'schen Ungleichung:

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)$$

für alle $x \in B(0,R)$. *Hinweis:* Skalieren Sie auf $R=1$ und benutzen die Poisson'sche Darstellungsformel.

Lösung. Die Poisson'sche Darstellung Formel für $B(0,R)$ ist:

$$u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{n\alpha(n)R}\int_{\partial B(0,R)} \frac{u(y)}{|x-y|^n}dS(y), \quad x \in B(0,R). \tag{c}$$

Falls $y \in \partial B(0,R)$ und $x \in B(0,R)$, es gilt

$$|x-y| \geq R-|x|. \tag{d}$$

Von (c) und (e) erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{R^2-|x|^2}{n\alpha(n)R}\int_{\partial B(0,R)} \frac{u(y)}{|x-y|^n}dS(y), \quad x \in B(0,R) \\ &\leq \frac{R^2-|x|^2}{n\alpha(n)R}\frac{1}{(R-|x|)^n}\int_{\partial B(0,R)} u(y)dS(y) \\ &= \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}\frac{R^{n-2}}{n\alpha(n)R^{n-1}}\int_{\partial B(0,R)} u(y)dS(y) \\ &= \frac{R+|x|}{(R-|x|)^{n-1}}R^{n-2}u(0). \end{aligned}$$

Für die andere Ungleichung verwendet man, dass

$$|x-y| \leq R+|x|. \tag{e}$$

falls $y \in \partial B(0,R)$ und $x \in B(0,R)$.

Aufgabe 26 (Hebbarkeitssatz)**.** Sei $n \geq 2$ und B die offene Einheitskugel. Sei $u \in C^2(B \setminus \{0\})$ eine beschränkte harmonische Funktion. Beweisen Sie, dass $a := \lim_{x\to 0} u(x)$ existiert, und wenn wir $u(0) := a$ setzen, dann u harmonisch auf B ist.

Hinweis: Sei v die Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B, \\ v = u & \text{auf } \partial B, \end{cases}$$

und $w(x) = \Phi(x) - \Phi(e_1)$, wobei Φ das Newton'sche Potential ist. Zeigen Sie mithilfe des Maximumprinzips in Gebieten der Form $B \setminus B_\delta(0)$, dass $|u(x) - v(x)| \le \varepsilon |w(x)|$ für alle $x \in B \setminus \{0\}$ und alle $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 27. Sei $K_j \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $j = 1, 2, \dots$ eine Familie von 2π-periodischen Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_j(x)\, dx = 1$,

(ii) $K_j(x) \ge 0$ für alle x,

(iii) für alle $\delta > 0$ gilt: $\int_{\delta < |x| < \pi} K_j(x)\, dx \to 0$ mit $j \to \infty$.

Sei $f \in C(\mathbb{R})$ 2π-periodisch. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_j(x-y) f(y)\, dy \to f(x) \text{ mit } j \to \infty$$

gleichmässig in x ist. Was ist das Limes, wenn K_j symmetrisch ist für alle j, aber f nur stückweise stetig ist?

Lösung. Da f stetig und periodisch ist, ist sie gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$, falls $|x - y| \le \delta$, dann $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$. Sei $x \in [-\pi, \pi]$. Wir haben

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_j(x-y) f(y) dy - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_j(x-y) f(y) dy - f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_j(x-y) dy \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_j(x-y) \Big[f(y) - f(x) \Big] dy \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_j(x-y) |f(y) - f(x)| dy \\
\text{(da } f \text{ und } K_j \text{ periodisch)} &\le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_j(y) |f(x-y) - f(x)| dy \\
&\le \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \le |y| \le \pi} K_j(y) |f(x-y) - f(x)| dy \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \delta} K_j(y) |f(x-y) - f(x)| dy \\
&\le \frac{2 \max |f|}{2\pi} \int_{\delta \le |y| \le \pi} K_j(y) dy \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \delta} K_j(y) |f(x-y) - f(x)| dy \\
\text{(gleichmäßig Stetigkeit)} &\le \frac{2 \max |f|}{2\pi} \int_{\delta \le |y| \le \pi} K_j(y) dy + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{|y| < \delta} K_j(y) dy \\
\text{dank (i)} &\le \frac{2 \max |f|}{2\pi} \int_{\delta \le |y| \le \pi} K_j(y) dy + \varepsilon
\end{aligned}$$

Wir können jetzt den $\limsup$ mit $j \to \infty$ auf den beiden Seiten nehmen:

$$\limsup_{j\to\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_j(x-y)f(y)dy - f(x) \right| \leq \varepsilon + \limsup_{j\to\infty} \frac{2\max|f|}{2\pi} \int_{\delta\leq|y|\leq\pi} K_j(y)dy$$
$$\text{(dank (iii))} \leq \varepsilon$$

Da ε nicht von x abhängt, gilt

$$\limsup_{j\to\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_j(x-y)f(y)dy - f(x) \right| = 0$$

gleichmäßig in x.

Frage: Warum ist es wichtig, dass $K_j \geq 0$? Was kann passieren, falls K_j nicht diese Eigenschaft hat?

Mit demselben Beweis kann man das Folgende zeigen. Falls K_j symmetrisch und f nur stückweise stetig ist, dann

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_j(x-y)f(y)\,dy \to \frac{f(x+)+f(x-)}{2} \text{ mit } j \to \infty,$$

wobei

$$f(x+) := \lim_{y\to x+} f(y), \quad f(x-) := \lim_{y\to x-} f(y).$$

Aufgabe 28. Bestimmen Sie die Greensche Funktion für

(i) die Halbkugel $\overset{\circ}{B}(0,1) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$,

(ii) das Gebiet $\{(r\cos\theta, r\sin\theta) : r > 0,\, 0 < \theta < \frac{\pi}{N}\}$ für $N \in \mathbb{N}$.

Begründen Sie Ihre Antworten.