Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2017/18, Prof. Dr. B. Fritzsche

Serie 11 - Abgabetermin 15.01.2018

11-A Sei $\mathbb{A} \in K^{p\times p}$ eine Matrix mit *Blockdiagonalgestalt*, d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sowie $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^{n} p_j = p$, sodass in der Blockdarstellung $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{jk})_{j,k=1}^{n}$ von $\mathbb{A}$ mit gewissen Blöcken $\mathbb{A}_{jk} \in K^{p_j\times p_k}, j,k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ alle Blöcke außer der Blockdiagonalen Nullblöcke sind, d.h., dass $\mathbb{A}_{jk} = \mathbb{O}_{p_j\times p_k}$ für alle $j,k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ mit $j \neq k$ gilt. (Es wird für $\mathbb{A}$ dann auch $\operatorname{diag}(\mathbb{A}_{11}, \mathbb{A}_{22}, \ldots, \mathbb{A}_{nn})$ oder $\operatorname{diag}(\mathbb{A}_{jj})_{j=1}^{n}$ geschrieben.)

(a) Seien $r_1, \ldots, r_v \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{B} = (\mathbb{B}_{kl})_{\substack{k=1,\ldots,n\\ l=1,\ldots,v}}$ eine Blockmatrix mit Blöcken $\mathbb{B}_{kl} \in K^{p_k\times r_l}, k \in \mathbb{Z}_{1,n}, l \in \mathbb{Z}_{1,v}$. Geben Sie eine Blockdarstellung von $\mathbb{AB}$, d.h. von

$$\operatorname{diag}(\mathbb{A}_{11}, \mathbb{A}_{22}, \ldots, \mathbb{A}_{nn}) \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} & \ldots & \mathbb{B}_{1v} \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} & \ldots & \mathbb{B}_{2v} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{B}_{n1} & \mathbb{B}_{n2} & \ldots & \mathbb{B}_{nv} \end{pmatrix}$$

an.

(b) Seien $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{C} = (\mathbb{C}_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$ eine Blockmatrix mit Blöcken $\mathbb{C}_{ij} \in K^{s_i\times p_j},\ i \in \mathbb{Z}_{1,m}, j \in \mathbb{Z}_{1,n}$. Geben Sie eine Blockdarstellung von $\mathbb{CA}$, d.h. von

$$\begin{pmatrix} \mathbb{C}_{11} & \mathbb{C}_{12} & \ldots & \mathbb{C}_{1n} \\ \mathbb{C}_{21} & \mathbb{C}_{22} & \ldots & \mathbb{C}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{C}_{m1} & \mathbb{C}_{m2} & \ldots & \mathbb{C}_{mn} \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}(\mathbb{A}_{11}, \mathbb{A}_{22}, \ldots, \mathbb{A}_{nn})$$

an.

(c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{diag}(\mathbb{A}_{11}, \mathbb{A}_{22}, \ldots, \mathbb{A}_{nn})$ genau dann invertierbar ist, wenn die Matrizen $\mathbb{A}_{jj}$ für alle $j \in \mathbb{Z}_{1,n}$ invertierbar sind, und geben Sie in diesem Fall eine Blockdarstellung von $(\operatorname{diag}(\mathbb{A}_{11}, \mathbb{A}_{22}, \ldots, \mathbb{A}_{nn}))^{-1}$ an.

11-B Eine Matrix $\mathbb{P}$ aus $K^{q\times q}$ heißt *Permutationsmatrix*, falls es eine Permutation $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & q \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(q) \end{pmatrix}$ der Zahlen $1, 2, \ldots, q$ derart gibt, dass $\mathbb{P} = (\delta_{j,\varphi(k)})_{j,k=1}^{q}$ gilt, wobei δ_{kl} das Kroneckersymbol ist: $\delta_{kl} := 1$ für $k = l$ und $\delta_{kl} := 0$ für $k \neq l$. Für $\mathbb{P}$ wird dann $\mathbb{P}_{\varphi}^{(q)}$ geschrieben. Weisen Sie folgende Aussagen nach:

(a) Bezeichne $\mathbf{e}_1^{(q)}, \ldots, \mathbf{e}_q^{(q)}$ die natürliche Basis von K^q. Dann gilt $\quad \mathbb{P}_{\varphi}^{(q)} = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{e}_{\varphi(j)}^{(q)} (\mathbf{e}_j^{(q)})^T$.

(b) Ist $\mathbb{A} = (\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_q)$ die Blockdarstellung über die Spalten einer beliebigen Matrix $\mathbb{A} \in K^{p\times q}$, so gilt $\quad \mathbb{A}\mathbb{P}_{\varphi}^{(q)} = (\mathbf{s}_{\varphi(1)}, \mathbf{s}_{\varphi(2)}, \ldots, \mathbf{s}_{\varphi(q)})$.

(c) Ist $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{z}_q \end{pmatrix}$ die Blockdarstellung über die Zeilen einer beliebigen Matrix $\mathbb{B} \in K^{q\times r}$, so gilt

$$(\mathbb{P}_{\varphi}^{(q)})^T \mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{\varphi(1)} \\ \mathbf{z}_{\varphi(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{\varphi(q)} \end{pmatrix}.$$

(d) Jede Permutationsmatrix $\mathbb{P}_{\varphi}^{(q)}$ ist invertierbar und es gilt $\quad (\mathbb{P}_{\varphi}^{(q)})^{-1} = (\mathbb{P}_{\varphi}^{(q)})^T$.

(e) Sind $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & q \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \ldots & \varphi(q) \end{pmatrix}$ und $\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & q \\ \psi(1) & \psi(2) & \ldots & \psi(q) \end{pmatrix}$ Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, q$ und bezeichnet $\varphi\psi$ die Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, q$, die durch Hintereinanderausführung der Permutationen φ und ψ entsteht, so gilt $\mathbb{P}_{\varphi\psi}^{(q)} = \mathbb{P}_{\varphi}^{(q)}\mathbb{P}_{\psi}^{(q)}$.

(f) Jede Permutationsmatrix aus $K^{q\times q}$ läßt sich als endliches Produkt von Elementarmatrizen des Typs $\mathbb{P}^{(q)}_{(jk)}$ darstellen.

(g) Die Menge aller Permutationsmatrizen aus $K^{q\times q}$ bilden bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. Bestimmen Sie die Menge aller $q \in \mathbb{N}$, für die diese Gruppe abelsch ist.

11-C Seien $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbb{A} \in K^{p\times p}$, $\mathbb{C} \in K^{q\times p}$ und $\mathbb{D} \in K^{q\times q}$ sowie $\mathbb{E} := \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{O}_{p\times q} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix}$.

($\mathbb{E}$ wird dann eine *untere Blockdreiecksmatrix* genannt.)

(a) Weisen Sie nach, dass $\mathbb{E}$ genau dann invertierbar ist, wenn $\mathbb{A}$ und $\mathbb{D}$ invertierbar sind.

(b) Geben Sie im Fall der Invertierbarkeit von $\mathbb{E}$ eine Blockdarstellung der zu $\mathbb{E}$ inversen Matrix $\mathbb{E}^{-1}$ an.

(c) Folgern Sie aus (a) das folgende Resultat (für *obere Blockdreiecksmatrizen*): Seien $\mathbb{B} \in K^{p\times q}$ und $\mathbb{F} := \begin{pmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{O}_{q\times p} & \mathbb{D} \end{pmatrix}$. Es ist $\mathbb{F}$ genau dann invertierbar, wenn $\mathbb{A}$ und $\mathbb{D}$ invertierbar sind. Geben Sie (mit Hilfe von (b)) im Fall der Invertierbarkeit von $\mathbb{F}$ eine Blockdarstellung der zu $\mathbb{F}$ inversen Matrix $\mathbb{F}^{-1}$ an.

Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass $\mathbb{E}$ invertierbar ist und bestimmen Sie die Blöcke $\mathbb{X} \in K^{p\times p}$, $\mathbb{Y} \in K^{p\times q}$, $\mathbb{W} \in K^{q\times p}$ und $\mathbb{Z} \in K^{q\times q}$ der Inversen $\mathbb{E}^{-1} := \begin{pmatrix} \mathbb{X} & \mathbb{Y} \\ \mathbb{W} & \mathbb{Z} \end{pmatrix}$.

11-D Eine (quadratische) $p \times p$-Matrix $\mathbb{A} = (a_{jk})_{j,k=1}^{p} \in K^{p\times p}$ heißt *untere (bzw. obere) $p \times p$-Dreiecksmatrix*, falls $a_{jk} = 0$ für alle $j, k \in \mathbb{Z}_{1,p}$ mit $j < k$ (bzw. $k < j$) gilt. Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sowie $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ und $p := \sum_{j=1}^{n} p_j$. Eine (quadratische) $p \times p$-Matrix $\mathbb{A} \in K^{p\times p}$ nennt man *eine untere (bzw. obere) $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$-Blockdreiecksstruktur besitzend*, falls gilt: Bezeichnet $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{jk})_{j,k=1}^{n}$ die Blockdarstellung von $\mathbb{A}$ mit Blöcken $\mathbb{A}_{jk} \in K^{p_j\times p_k}, j, k \in \mathbb{Z}_{1,n}$, so gilt $\mathbb{A}_{jk} = \mathbb{O}_{p_j\times p_k}$ für alle $j, k \in \mathbb{Z}_{1,n}$ mit $j < k$ (bzw. $k < j$).

Beweisen Sie folgende Aussagen, wobei $n \in \mathbb{N}$ sowie $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ seien und $p := \sum_{j=1}^{n} p_j$ bezeichne:

(a) Die Menge aller Matrizen aus $K^{p\times p}$ mit unterer $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$-Blockdreiecksstruktur bilden bez. der Matrizenmultiplikation eine Halbgruppe.

(b) Die Menge aller Matrizen aus $K^{p\times p}$ mit oberer $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$-Blockdreiecksstruktur bilden bez. der Matrizenmultiplikation eine Halbgruppe.

(c) Sei $\mathbb{A} = (\mathbb{A}_{jk})_{j,k=1}^{n}$ mit Blöcken $\mathbb{A}_{jk} \in K^{p_j\times p_k}, j, k \in \mathbb{Z}_{1,n}$, eine Matrix, welche untere oder obere $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$-Blockdreiecksstruktur besitzt. Weisen Sie nach, dass $\mathbb{A}$ genau dann invertierbar ist, wenn sämtliche Diagonalblöcke $\mathbb{A}_{11}, \mathbb{A}_{22}, \ldots, \mathbb{A}_{nn}$ invertierbar sind.

(d) Die Menge aller invertierbaren Matrizen aus $K^{p\times p}$ mit unterer $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$-Blockdreiecksstruktur bilden eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $GL(p, K)$.

(e) Die Menge aller invertierbaren Matrizen aus $K^{p\times p}$ mit oberer $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$-Blockdreiecksstruktur bilden eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $GL(p, K)$.

(f) Formulieren Sie die Resultate für den Spezialfall der unteren (bzw. oberen) Dreiecksmatrizen, d.h., wenn $p_j = 1$ für jedes $j \in \mathbb{Z}_{1,n}$ gilt.

(g) Machen Sie einen Vorschlag, wie man den Begriff der oberen (bzw. unteren) Dreiecksmatrix (bzw. Matrix mit Blockdreiecksstruktur) auf Matrizen aus $K^{p\times q}$ verallgemeinern kann.

Hinweis: Gehen Sie für den Nachweis von (c) und (d) induktiv vor und verwenden Sie Übungsaufgabe C. Führen Sie die Aussagen (b) und (e) auf (a) bzw. (d) zurück.

11-Z Seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbb{U}_m = (\delta_{j,k+1})_{j,k=0}^{m}$. Berechnen Sie für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $\mathbb{A} = (a_{jk})_{\substack{j=0,\ldots,m \\ k=0,\ldots,n}} \in K^{(m+1)\times(n+1)}$ die Matrizen $\mathbb{B}_k := \mathbb{U}_m^k \mathbb{A}$ und $\mathbb{C}_k := \mathbb{A}\mathbb{U}_n^k$. Beschreiben Sie die Wirkung einer Linksmultiplikation mit $\mathbb{U}_m$ (bzw. einer Rechtsmultiplikation mit $\mathbb{U}_n$) mit Worten und stellen Sie ausgehend von Blockdarstellungen von $\mathbb{A}$ die Matrizen $\mathbb{B}_k$ und $\mathbb{C}_k$ als Blockmatrizen dar.