Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Prof. Dr. László Székelyhidi
Dr. Stefano Modena

WS2017/18

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 8
Lösungen bitte zur Übung am 1. Dezember 2017 mitbringen

Aufgabe 29. Sei $n \geq 2$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u \in C(U)$.

(a) Zeigen Sie, dass u harmonisch ist, falls u die folgende Eigenschaft hat:

$$\forall\, x \in U \quad \exists\, r_j \to 0 \ \text{ so dass } \fint_{B(x,r_j)} u(y)dy = u(x).$$

(b) Beweisen Sie, dass u genau dann subharmonisch ist (d.h. $u(x) \leq \fint_{\partial B(x,r)} u(y)dS(y)$ für alle $B(x,r) \subset U$), wenn

$$u(x) \leq \fint_{B(x,r)} u(y)dy \quad \forall B(x,r) \subset U.$$

Hinweis: Betrachten Sie die harmonische Ersetzung von u in $B(x,r)$.

Aufgabe 30. Sei u harmonisch auf $\mathbb{R}^n$ und $u(x',0) = 0$ für alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Zeigen Sie, dass

$$u(x', -x_n) = -u(x', x_n)$$

für alle $(x', x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Funktion

$$v(x) := \begin{cases} u(x', x_n) & x_n \geq 0 \\ -u(x', -x_n) & x_n < 0 \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}^n$ harmonisch ist. Betrachten Sie hierzu die Lösung des Dirichletproblems $\Delta w = 0$ auf $B_r(0)$ und $w = v$ auf $\partial B_r(0)$ für beliebiges $r > 0$ und zeigen Sie, dass $w(x', x_n) + w(x', -x_n) = 0$.

Aufgabe 31. Sei $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_n > 0\}$. Zeigen Sie, dass es eine nichttriviale Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ gibt mit

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+.$$

Warum ist dies kein Widerspruch zum Maximumprinzip?
Beweisen Sie weiterhin, dass $u \equiv 0$ gilt, falls u zusätzlich beschränkt ist.

Lösung. Betrachten wir die Funktion $u(x) := x_n$. Sie ist harmonisch, $u = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ und sie ist nichttrivial. Das ist kein Widerspruch zum Maximumprinzip, da U unbeschränkt ist und das Maximumprinzip gilt nur, in Allgemein, in beschränkten Gebieten.

Sei jetzt u harmonisch in $\mathbb{R}^n_+$, $u = 0$ auf $\partial\mathbb{R}^n_+$ und beschränkt. Betrachten wir die Funktion

$$v(x', x_n) := \begin{cases} u(x', x_n), & x_n \geq 0, \\ -u(x', x_n), & x_n < 0. \end{cases}$$

Wir haben schon in der Unterricht gezeigt (durch die Mittelwerteigenschaft), dass v harmonisch in $\mathbb{R}^n$ ist. Der Satz von Liouville impliziert, dass v konstant ist. Da $v(0) = 0$, erhalten wir $v \equiv 0$.

Aufgabe 32 (Méthode de Balayage)**.** Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und sei $\{B_i,\, i \in \mathbb{N}\}$ eine Familie von offenen Kugeln mit $\overline{B_i} \subset U$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$. Definiere für $u \in C^0(U)$ die harmonischen Ersetzungen $T_i u$ durch

$$(T_i u)(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } x \in U \setminus B_i, \\ \int_{\partial B_i} P_i(x,y) u(y) dS(y) & \text{für } x \in B_i, \end{cases}$$

wobei P_i den Poissonkern zu B_i bezeichnet. Sei $u_0 \in C^0(\overline{U})$ eine subharmonische Funktion und definiere die Folge $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $C^0(\overline{U})$ iterativ durch

$$u_{k+1} = (T_{k+1} \circ T_k \circ \cdots \circ T_1) u_k.$$

Zeigen Sie, dass $u_\infty := \lim_{k\to\infty} u_k$ existiert und dass u_∞ harmonisch ist.