**Übungsaufgaben zur Vorlesung Lineare Algebra I**

Wintersemester 2017/18, Prof. Dr. B. Fritzsche

**Serie 8 - Abgabetermin 06.12.2017**

8-A Es seien die Vektoren $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Begründen Sie, dass jeweils zwei dieser Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ bilden, und bestimmen Sie für jede dieser Basen die Koordinatenvektoren von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$.

8-B (a) Seien $V$ ein $K$-Vektorraum mit $V \neq \{0\}$ und $(\mathbf{v}_j)_{j\in J}$ eine Basis von $V$. Dann gibt es zu jedem $\mathbf{v} \in V$ eine eindeutig bestimmte Familie $(\alpha_j)_{j\in J}$ aus $K$, wobei höchstens endlich viele der $\alpha_j, j \in J$, ungleich dem Nullelement in $K$ sind, derart, dass $\mathbf{v} = \sum_{j\in J}{}' \alpha_j \mathbf{v}_j$ ist. Für $k \in J$ heißt $\alpha_k$ dann die *$k$-te Koordinate* des Vektors $\mathbf{v}$ bzgl. der Basis $(\mathbf{v}_j)_{j\in J}$ von $V$. Für $k \in J$ bezeichne $v_k$ die *$k$-te Koordinatenfunktion* auf $V$ bzgl. der Basis $(\mathbf{v}_j)_{j\in J}$, d.h., die gemäß $v_k(\mathbf{v}) := \alpha_k$ definierte Abbildung $v_k : V \to K$. Weisen Sie nach, dass für alle $k \in J$, alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ und alle $\alpha \in K$ die Gleichungen

$$v_k(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = v_k(\mathbf{x}) + v_k(\mathbf{y}) \quad \text{und} \quad v_k(\alpha\mathbf{x}) = \alpha v_k(\mathbf{x})$$

erfüllt sind.

(b) Seien $q \in \mathbb{N}$ und $V$ ein $q$-dimensionaler $K$-Vektorraum. Des Weiteren sei $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q)$ eine (geordnete) Basis. Für $\mathbf{x} \in V$ heißt dann der Vektor $\begin{pmatrix} v_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ v_q(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ aus $K^q$ der *Koordinatenvektor von* $\mathbf{x}$ bzgl. der geordneten Basis $B = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Omega_B : V \to K^q$, welche jedem $\mathbf{v} \in V$ seinen Koordinatenvektor zuordnet, für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ und alle $\alpha, \beta \in K$ die Gleichung $\Omega_B(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\Omega_B(\mathbf{x}) + \beta\Omega_B(\mathbf{y})$ erfüllt.

8-C Seien $U$ ein Unterraum eines Vektorraumes $V$ über einem Körper $K$ und $d$ eine nichtnegative ganze Zahl. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\dim_K U = d$.

(ii) Es gibt ein linear unabhängiges System von $d$ Vektoren aus $U$, während jedes System von $d + 1$ Vektoren aus $U$ linear abhängig ist.

8-D Seien $U$ ein endlich erzeugbarer Unterraum eines Vektorraumes $V$ über einem Körper $K$ mit $U \neq \{0_V\}$. Bezeichne $d := \dim_K U$. Weiterhin seien $u_1, \ldots, u_d \in U$. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $u_1, \ldots, u_d$ ist eine Basis von $U$.

(ii) $u_1, \ldots, u_d$ ist ein Erzeugendensystem von $U$.

(iii) $u_1, \ldots, u_d$ sind linear unabhängig.

(iv) Für jedes $u \in U$ gibt es eindeutig bestimmte $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in K$ mit $u = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j u_j$.

8-Z Seien $d \in \mathbb{N}_0$ und $V$ ein $d$-dimensionaler $K$-Vektorraum. Weiterhin sei $U$ ein Unterraum von $V$. Die (nichtnegative ganze) Zahl

$$\operatorname{kodim}_K(U, V) := d - \dim_K U$$

heißt dann *Kodimension von $U$ in $V$*. Ein Unterraum $U$ von $V$ mit Kodimension 1 heißt (lineare) *Hyperebene in $V$*. Unterräume $U$ und $W$ von $V$ heißen *transversal*, falls $\operatorname{kodim}_K(U + W, V) = 0$ gilt.

(a) Seien $U$ und $W$ Unterräume von $V$. Begründen Sie, dass $U$ und $W$ genau dann transversal sind, wenn $U + W = V$ gilt.

(b) Sei $H$ eine (lineare) Hyperebene in $V$. Begründen Sie, dass es außer $H$ und $V$ keinen anderen Unterraum $U$ von $V$ gibt, der $H \subseteq U \subseteq V$ erfüllt.

(c) Seien $H_1$ und $H_2$ zwei verschiedene (lineare) Hyperebenen. Zeigen Sie, dass $H_1$ und $H_2$ transversal sind und sich in einem Unterraum der Kodimension 2 schneiden, d.h., dass $H_1 + H_2 = V$ und $\operatorname{kodim}_K(H_1 \cap H_2, V) = 2$ erfüllt sind.