3.Übung zur Vorlesung Analysis

für Grund-, Mittel- und Förderschullehramt

Mathematisches Institut, Universität Leipzig

Dozent: Dr. Jan-David Hardtke

Ausgabe: Freitag, 27.10.2017
Abgabe: Freitag, 3.11.2017 bis **spätestens** 12:00 Uhr im Postfach Hardtke im Raum A 514 oder im Anschluß an die Donnerstagsvorlesung (verspätete Abgaben werden nicht bewertet).

Wichtig: Alle Abgaben sind mit Namen, Matrikelnummer, Übungstermin und Namen des Übungsleiters zu versehen. Die Übungen müssen **selbstständig** bearbeitet werden (keine Partnerabgabe).

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n} = 1.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung bewiesene Tatsache $\sqrt[n]{n} \to 1$.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien $a \geq b \geq 0$ reelle Zahlen. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = a.$$

Aufgabe 3 (1+1+1+1 Punkte)**.** Bestimmen Sie folgende Grenzwerte (mit Begründung):

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+5n^2-2n}{n^3+4n+7}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+(-1)^n n^2}{n^4+5n+1}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 2^{-n}+1}{3n^2+6n}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^{n+1}+2^{n+2}}$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)**.**
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Zeigen Sie:
(i) Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt (d. h. $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist nach unten beschränkt), so gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \infty.$$

(ii) Ist zusätzlich $\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} > 0$, so ist auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty.$$