Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Prof. Dr. László Székelyhidi
Dr. Stefano Modena

WS2017/18

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 2
Lösungen bitte zur Übung am 20. Oktober 2017 mitbringen

Aufgabe 5 (Die Kelvin Transformation)**.**
Für $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ sei

$$v(x) := |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass, falls $\Delta u = 0$, dann auch $\Delta v = 0$.

Aufgabe 6. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet.

(a) Falls u und u^2 harmonisch[a] auf U sind, dann ist u konstant.

(b) Sei $u \in C^\infty(B_1)$, wobei $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$. Beweisen Sie, dass u harmonisch ist genau dann wenn $x \cdot \nabla u(x)$ harmonisch ist.

Aufgabe 7 (Fundamentallösung)**.**
Sei $L = \Delta + c$ in $\mathbb{R}^3$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.
(a) Finden Sie alle rotationsinvariante Lösungen der Gleichung $Lu = 0$.
(b) Zeigen Sie, dass

$$\Psi(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}\cos(\sqrt{c}|x|), \qquad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

eine Fundamentallösung des Operators $\Delta + c$ auf $\mathbb{R}^3$ ist (d.h. zu zeigen ist, dass, falls $f \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$ und $u(x) := \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(x-y)f(y)dy$, dann $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $Lu = f$).

Aufgabe 8. Sei $n \geq 3$, $f \in C_c^2(B_R(0))$ und $u = \Phi \star f$, wobei Φ die Fundamentallösung von Δ ist. Beweisen Sie, dass falls f rotationsinvariant ist, dann

$$u(x) = \Phi(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy \quad \text{für } |x| > R.$$

Hinweis: zeigen Sie zunächst, dass u rotationsinvariant ist.

[a] Siehe Aufgabe 3 für die Definition von harmonischen Funktionen.