# Übungsblatt 12

1) a) Seien $(X, \varrho)$, $(Y, \sigma)$ und $(Z, \tau)$ metrische Räume, sowie $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Lipschitz stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass dann $g \circ f : X \to Z$ auch Lipschitz stetig ist, und finden Sie die (optimale) Abschätzung von $Lip(g \circ f)$ durch $Lip(f)$ und $Lip(g)$. 1 Pkt

b) Wir betrachten den aufgeschlitzen Anulus

$$A = \{z \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < |z| < 2\} \setminus ([1, 2] \times \{0\}),$$

der eine zusammenhängende Menge ist. Finden Sie eine $C^1$-Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ mit beschränktem totalen Differential $Df : A \to \mathbb{R}^{1\times 2}$, die nicht Lipschitzstetig ist. 2 Pkte

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, also eine $m$-mal-$n$ Matrix. Zeigen Sie, dass die Operatornorm die Ungleichung

$$\|A\| \leq \|A\|_2 = \left( \sum_{i,j} A_{i,j}^2 \right)^{1/2}$$

erfüllt, und charakterisieren Sie die $A$, für die Gleichheit gilt. Finden Sie, für $n = m$, das größtmögliche $c_n$, so dass

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \quad \|A\| \geq c_n \|A\|_2.$$

$2 + 1 + 3^*$ Punkte

2) **Implizite Funktion elementar** Sei $(0, 0) \in U$ offen in $\mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine $C^1$-Funktion mit

$$f(0, 0) = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) > 0.$$

Zeigen Sie, unter alleiniger Benutzung in Analysis I und II hergeleiteten Ergebnisse Folgendes.

a) Es gibt $\varepsilon, \delta > 0$ so dass, für alle $x \in (-\delta, \delta)$ gilt

$f(x, -\varepsilon) < 0 < f(x, \varepsilon)$ und $y \mapsto f(x, y)$ ist strikt wachsend auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$.

b) Es gibt also genau eine Funktion $i : (-\delta, \delta) \to (-\varepsilon, \varepsilon)$ so dass gilt

Wenn $(x, y) \in (-\delta, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, dann $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = i(x)$.

c) Falls $i$ differenzierbar ist (und $\varepsilon, \delta > 0$ aber genügend klein, **wie klein?**), dann gilt

$$\forall x \in (-\delta, \delta) : \quad i'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, i(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, i(x))}.$$

$3 + 1 + 2$ Punkte

**Abgabe** am 10.01.2018, 9.10 Uhr in Hörsaal 5