

Übungen zur Vorlesung
Analysis für Informatiker
Blatt 3

Lehrer öffnen die Tür, hineingehen muss man aber selbst.
CHINESISCHES SPRICHWORT

Aufgabe 1. (*Gruppen, c) schriftlich, 3 Punkte*)

Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Bezeichne mit $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M und definiere

$$\text{Abb}(M) := \{f : M \rightarrow M\}, \quad \text{Bij}(M) := \{f : M \rightarrow M \text{ bij}\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- a) $(\mathcal{P}(M), \cap)$ und $(\mathcal{P}(M), \cup)$ sind keine Gruppen.
- b) $(\text{Abb}(M), \circ)$ ist keine Gruppe, sobald M mindestens zwei Elemente hat.
- c) $(\text{Bij}(M), \circ)$ ist eine Gruppe. Ist sie kommutativ?

Aufgabe 2. (*Gruppen, mündlich*)

- a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und betrachte $G := \{0, \dots, n-1\}$ mit

$$+ : G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \mapsto a + b \pmod{n}.$$

Zeigen Sie, dass $(G, +)$ eine kommutative Gruppe ist.

- b) Seien G_1 und G_2 zwei *Untergruppen* einer Gruppe $(G, \cdot)$, d.h., G_1 und G_2 sind Teilmengen von G und selbst Gruppen bezüglich $\cdot$. Zeigen Sie, dass $G_1 \cap G_2$ auch eine Untergruppe von G ist. Gilt dasselbe für $G_1 \cup G_2$? (Hinweis: Probieren Sie die Untergruppen von $\mathbb{Z}$ von der Form $m\mathbb{Z} := \{mn : n \in \mathbb{Z}\}$.)

Aufgabe 3. (*Reelle Zahlen, b) schriftlich, 3 Punkte*)

- a) Begründen Sie nur mit Hilfe der Körperaxiome, dass $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. (Verwenden Sie nicht den binomischen Lehrsatz.)
- b) (Bernoullische Ungleichung) Beweisen Sie

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie außerdem, dass die Ungleichung

strikt (d.h. $(1+x)^n > 1+nx$) für alle $n \geq 2$ und $x \neq 0$ ist. (Hinweis: Induktion nach n .)

Aufgabe 4. (Betrag, graphische Darstellung, alles bis auf M_2 schriftlich, a) 2 Punkte, b) 3 Punkte)

a) Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit Begründung.

$$f_1(x) := |x| - 1, \quad f_2(x) := ||x| - 1|, \quad f_3(x) := |||x| - 1| - 1|.$$

(Hinweis: Versuchen Sie, den Betrag geometrisch zu interpretieren und schrittweise zu gehen.)

b) Zeichnen Sie die folgenden Mengen mit Begründung:

$$M_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| - 1 \leq y \leq 1 - |x|\},$$

$$M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x, y) \in M_1\},$$

$$M_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, 2y) \in M_1\},$$

$$M_4 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y, x) \in M_3\}.$$

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind zusammengeheftet vor der Vorlesung am Montag, dem 30. 10. 2017 abzugeben.