Mathematisches Institut
Universität Leipzig
PROF. DR. BERND KIRCHHEIM

WS 2017/18
6.Februar 2018

Klausur zu Maß- und Integrationstheorie

Erlaubte Hilfsmittel: Schreibmaterialien (ohne Kommunikations- oder andere intelligente Feature) sowie ein A4-Blatt (beidseitig) mit *handschriftlichen* (!!) Notizen.

Bitte ergänzen oder korrigieren Sie folgende Angaben:

Matrikel-Nr.:

Studiengang:

Name:

Vorname:

Fachsemesterzahl:

1	2	3	4	5	6	$\sum$

In den folgenden Aufgaben 1 – 2 kreuzen Sie in der jeweiligen Tabelle “W” an, falls Sie nach *sorgfältigem Lesen* die entsprechende Aussage für wahr halten, und “F” wenn Sie glauben, diese ist falsch.

Sie erhalten 2 Punkte für jedes richtige und -2 Punkte für jedes falsche Kreuz, 0 Punkte falls nichts angekreuzt wurde, aber keinesfalls weniger als Null Punkte für die beiden Aufgaben 1 und 2 zusammen.

Aufgabe 1)

i) Es gibt ein äusseres Maß μ auf $\mathbb{R}^n$, so dass keine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ μ-messbar ist.

ii) Jede beschränkte Menge im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ist eine Borelsche Menge.

iii) Wenn $(X, \mathcal{A})$ ein Maßraum ist und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass $x \to f^3(x)$ messbar ist, dann ist auch f messbar.

iv) Wenn $f_n : \mathbb{R} \to [0, 2018]$ Lebesgue messbar sind und $f_n \leq f_{n+1}$, dann $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mathcal{L} = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n d\mathcal{L}$.

v) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige Lebesgue integrierbare Funktion. Dann ist $F(x) = \int_0^x \sqrt[3]{(f(t))^2} \, d\mathcal{L}(t)$ eine auf $[0, \infty]$ stetige Funktion.

	i)	ii)	iii)	iv)	v)
W					
F					

Aufgabe 2)

i) Der Graph jeder stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine Nullmenge bezüglich des Lebesguemaßes in der Ebene $\mathbb{R}^2$.

ii) Wenn $f : (0,1)^2 \to \mathbb{R}$ stetig ist, dann gilt $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, dydx$.

iii) Die Funktion $f(x,y) = \sin((x^2 + y^2)^{-\alpha})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, ist integrierbar genau dann wenn $\alpha > 1$.

iv) Die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^5 + x^5 = 0\}$ ist eine Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^2$.

v) $v = (1,1,2)$ ist im Punkt $p = (1,1,1)$ ein Tangentialvektor , d.h. $v \in \mathrm{Tan}_p M$, an die Mannigfaltigkeit $M = \{(x,y,z) \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

	i)	ii)	iii)	iv)	v)
W					
F					

Aufgabe 3) Die Funktion $f : M = [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = \sqrt{x}e^{-x^2y^2}.$$

Zeigen Sie, dass f Borel messbar ist. (3 Punkte)

Zeigen Sie: f hat bezüglich des Lebesguemaßes über M kein endliches Integral. (4 Punkte)
Beweisen Sie nun, dass auch

$$g(x, y) = \sqrt{x}e^{-x^2y^2} \frac{x + y^2}{1 + x + y^2}$$

bezüglich des Lebesguemaßes über M kein endliches Integral hat. (3 Punkte)

Aufgabe 4) Sei $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. Zeigen Sie, wie aus dem Satz von Tonelli und der Benutzung von Polarkoordinaten folgt, dass $I^2 = \pi$. Begründen Sie hierbei ausreichend! (3 Punkte)

Erklären Sie, warum für alle $\alpha \in \mathbb{R}$

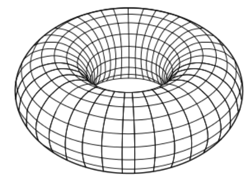
$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin^2(\alpha x)\,dx$$

definiert ist und begründen Sie, dass

$$F'(\alpha) = \int_0^\infty 2xe^{-x^2} \sin(\alpha x)\cos(\alpha x)\,dx.$$

Zeigen Sie nun, dass $F'(\alpha) = \alpha\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - 2F(\alpha)\right)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt, und finden Sie eine Formel für $F(\alpha)$. *[Hinweis: Sie können hierfür z.B. Separation der Variablen, korrekt begründet, aber ohne weitere Diskussion dieser Methode, nutzen.]* (7 Punkte)

Aufgabe 5)



Wir betrachten für $0 < r < R$ den Torus

$$\mathbb{T}_{r,R} = \{p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \operatorname{dist}(p, \mathbb{S}^1 \times \{0\}) < r\},$$

das heisst, die Menge aller Punkte im Raum, die vom Kreis(rand) mit Radius R um 0 in der xy-Ebene Abstand kleiner als r haben.

Sei zuerst $R = 1$. Zeigen Sie, unter Benutzung der Transformationsformel, dass $\mathcal{L}(\mathbb{T}_{r,1}) = 2\pi^2 r^2$. *[Hinweis: Es könnte helfen, den Torus als Rotation eines geeigneten Kreises in der xz-Ebene aufzufassen, es bedarf also nur eines zusätzlichen Winkels zur Parametrisierung. Das Lebesguemaß eines Kreises mit Radius r beträgt πr^2.]*

Beweisen Sie nochmal, diesmal mit dem Satz von Tonelli. dass $\mathcal{L}(\mathbb{T}_{r,1}) = 2\pi^2 r^2$. *[Hinweis: Skizzieren Sie den Schnitt von $\mathbb{T}_{r,1}$ mit $\{p \ : \ z = h\}$.]* (4 + 4 Punkte)

Leiten Sie daraus direkt eine Formel für das Volumen, d.h. das Lebesguemaß, des allgemeinen Torus $\mathbb{T}_{r,R}$ her. (2 Punkte)

Aufgabe 6) Zeigen Sie, dass die Gleichungen

$$x - \sin(y) + z = 0$$
$$x^2 + e^y - z^4 - 1 = 0$$

in einer Umgebung des Punktes $(0, 0, 0)$ eindeutig nach y und z aufgelöst werden können und dort zwei reelle Funktionen $y = y(x)$ und $z = z(x)$, wobei $y(0) = z(0) = 0$, definieren.

(4 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitungen dieser Funktionen y und z für x nahe 0 und entscheiden Sie, welcher der beiden Funktionen in $x = 0$ einen kritischen Punkt haben. Klassifizieren Sie alle kritischen Punkte.

$(3 + 3$ Punkte$)$