

ÜA Funktionalanalysis 1 - 6. Serie

1. (schriftlich) Zeigen Sie, dass für einen Operator $T \in L(X)$ in einem Banachraum X die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

(i) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ konvergiert in der Operatornorm.

(ii) Es existiert eine natürliche Zahl m mit $\|T^m\| < 1$.

(iii) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ konvergiert absolut, d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| < \infty$.

2. (mündlich) Zeigen Sie, dass die Menge der invertierbaren Operatoren

$$\{T \in L(X) : T \text{ invertierbar und } T^{-1} \in L(X)\}$$

in einem Banachraum X offen in $L(X)$ ist.

Hinweis: Neumannsche Reihe

3. (schriftlich) Sei $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass durch

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt$$

ein kompakter Operator $T : L_p[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definiert wird.

Hinweis: Zuerst muss man nachweisen, dass T nach $C[0, 1]$ abbildet, dann kann man die Kompaktheit mit Hilfe des Satzes von Arzela-Ascoli zeigen. Dazu kann man (mit Begründung!) verwenden, dass eine Teilmenge von $C[0, 1]$ genau dann relativkompakt ist, wenn sie beschränkt und gleichgradig stetig ist.

Zusatzfrage (mündlich):

Was ändert sich im Fall $p = 1$?

4. (mündlich) Zeigen Sie, dass für zwei stetige lineare Abbildungen $S, T \in L(X)$ in einem normierten Raum X niemals die Kommutatorrelation

$$(*) \quad ST - TS = I \quad (= \text{identische Abbildung in } X).$$

gelten kann.

Hinweis: Man führe einen indirekten Beweis und zeige zunächst, dass aus $(*)$ die Beziehung $ST^n - T^nS = nT^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. Daraus leite man dann einen Widerspruch ab.

Abgabe vor der Vorlesung am Dienstag, dem 28.11.2017