Wintersemester 17/18 Prof. Dr. J.S. Wilson

ALGEBRA I

Serie 12

Aufgabe 12.1. [3 Punkte] (a) Finden Sie

(1) eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(u)$ für $u = \sqrt{28} - 1$;

(2) eine $\mathbb{Q}$-Basis von $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$;

(3) eine $\mathbb{F}_2$-Basis von $\mathbb{F}_2(v)$, für eine Nullstelle v von $x^2 + x + 1$.

(b) Finden Sie das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$.

(c) Sei $\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0$ und $\beta = (1 + \alpha^2)^{-1}$. Schreiben Sie β als Polynomausdruck in α, und finden Sie das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 12.2. [2 Punkte] Sei L/K eine Erweiterung vom Primzahlgrad $[L\colon K] = p$.

(a) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper von L/K.

(b) Zeigen Sie, dass L/K eine einfache Erweiterung ist, und, falls $p = 2$ und $\operatorname{char} K \neq 2$, dass $L = K(u)$ für ein Element u mit $u^2 \in K$.

Aufgabe 12.3. [2 Punkte] Sei $\theta\colon K_1 \to K_2$ ein Isomorphismus von Körpern und sei $\overline{\theta}\colon K_1[x] \to K_2[x]$ durch $\sum \lambda_i x^i \mapsto \sum \theta(\lambda_i) x^i$ definiert. Zeigen Sie:

(a) $\overline{\theta}$ ist ein Isomorphismus von Ringen;

(b) falls $f \in K_1[x]$ irreduzibel ist, dann ist auch $\overline{\theta}(f) \in K_2[x]$ irreduzibel.

Aufgabe 12.4. [2 Punkte] Sei L ein Körper und α ein Automorphismus von L. Beweisen Sie, dass

$$F = \{l \in L \mid \alpha(l) = l\}$$

ein Unterkörper von L ist. Folgern Sie: falls $\mathbb{Q} \leqslant L$, dann ist jeder Automorphismus von L ein $\mathbb{Q}$-Automorphismus.

Aufgabe 12.5 [3 Punkte] Sei L/K eine eine Körpererweiterung und $\operatorname{Gal}(L/K)$ die Gruppe aller Automorphismen von L, die jeden Punkt von K festlassen. Für jede Untergruppe $H \leqslant \operatorname{Gal}(L/K)$ sei

$$L^H = \{l \in L \mid h(l) = l \text{ für alle } h \in H\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Gal}(L/M) \leqslant \operatorname{Gal}(L/K)$ für jeden Zwischenkörper M.

(b) L^H ist ein Zwischenkörper von L/K für jedes $H \leqslant \operatorname{Gal}(L/K)$.

(c) für alle $A \leqslant B \leqslant \operatorname{Gal}(L/K)$ gilt $L^A \geq L^B$.

(d) $M \leqslant L^{\operatorname{Gal}(L/M)}$ und $H \leqslant \operatorname{Gal}(L/L^H)$ für jeden Zwischenkörper M und jede $H \leqslant \operatorname{Gal}(L/K)$.

Aufgabe 12.6. [3 Punkte] Sei L/K eine Erweiterungen mit $[L\colon K]$ ungerade. Beweisen Sie, dass $K(\alpha) = K(\alpha^2)$ für alle $\alpha \in L$.

Abgabetermin. Bis zum Dienstag 9.01.2018 um 14.00 Uhr.

ALGEBRA I

Serie 13

Aufgabe 13.1. [3 Punkte] Zeigen Sie, wie Eisensteins Kriterium zur Irreduzibilität der folgenden Polynome über $\mathbb{Q}$ führt:

(a) $x^n - m$ für $n \geq 2$ und $m \neq 0, \pm 1$ quadratfrei;

(b) $2x^4 - 6x^2 + 9x - 15$, $x^2 + 1$, $x^2 - x + 1$.

(c) $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$, für eine Primzahl p.

Φ_p ist das *zyklotomische Polynom* vom Grad p.

[Hinweis: z.B. $f(x)$ irreduzibel $\Leftrightarrow$ $f(x+1)$ irreduzibel.]

Aufgabe 13.2. [3 Punkte] Seien m, n teilerfremde positive ganze Zahlen, K ein Körper, und $c \in K$. Zeigen Sie, dass $x^{mn} - c$ irreduzibel über K ist, dann und nur dann, wenn $x^m - c$ und $x^n - c$ irreduzibel sind.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$, mit $a \neq b$. Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

[Hinweis: imitieren Sie den Beweis, dass endliche Erweiterungen unendlicher Körper einfach sind.]

Aufgabe 13.3. [3 Punkte] Sei L/K eine Körpererweiterung. Ein Element $u \in L$ heißt *algebraisch* über K, falls $[K(u) \colon K]$ endlich ist, und die Erweiterung L/K heißt algebraisch, falls alle $u \in L$ algebraisch über K sind. Sei jetzt L/K eine beliebige Körpererweiterung. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für $u_1, \ldots, u_n \in L$ algebraisch ist $[K(u_1, \ldots, u_n) \colon K]$ endlich.

(b) $\{u \in L \mid u \text{ algebraisch über } K\}$ ist ein Unterkörper.

(c) Falls die Erweiterungen L/K und M/L algebraisch sind, dann ist auch M/K algebraisch.

(d) Es gibt unendliche algebraische Erweiterungen.

Aufgabe 13.4. [3 Punkte] (a) Finden Sie einen Zerfällungskörper L über $\mathbb{Q}$ für jedes der folgenden Polynome:

$$x^4 - 8x^2 + 15,\ x^3 - 2,\ x^4 - 7,\ x^8 - 1, x^4 + 4.$$

In jedem Fall bestimmen Sie $[L \colon \mathbb{Q}]$.

(b) Sei $f \in K[x]$ ein Polynom vom Grad n und S ein Zerfällungskörper über K. Beweisen Sie, dass $[S \colon K] \leqslant n!$.

Aufgabe 13.5. [3 Punkte] Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $[\mathbb{Q}(\alpha) \colon \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\beta) \colon \mathbb{Q}]$ sind endlich;

(ii) $[\mathbb{Q}(\alpha + \beta) \colon \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\alpha\beta) \colon \mathbb{Q}]$ sind endlich.

Abgabetermin. Bis zum 16.01.2018 um 14.00 Uhr.

ALGEBRA I

Serie 14

Aufgabe 14.1. [3 Punkte] (a) Finden Sie Körper K, L, M derart, dass L/K und M/L Normalerweiterungen sind, aber M/K nicht normal ist.

(b) Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ (mit $i^2 = -1$ wie gewöhnlich). Beweisen Sie, dass L/K eine Galoiserweiterung ist, und bestimmen Sie die Galoisgruppe. Für jede der fünf Untergruppen H beschreiben Sie den entsprechenden Unterkörper $\mathrm{Fix}\,(H) = \{u \in L \mid hu = u \text{ für alle } h \in H\}$.

Aufgabe 14.2. [3 Punkte] Sei p eine ungerade Primzahl und $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $x^p - 1 = (x-1)\Phi_p(x)$, und bestimmen Sie alle Nullstellen in $\mathbb{C}$ von Φ_p. Sei ζ eine dieser Nullstellen.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta)$ ein Zerfällungskörper für $\Phi_p(x)$ über $\mathbb{Q}$ ist. Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\zeta)\colon \mathbb{Q}]$, und geben Sie eine $\mathbb{Q}$-Basis für $\mathbb{Q}(\zeta)$ an.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $g \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ ein $\mu(g) \in \mathbb{Z}$ mit $g(\zeta) = \zeta^{\mu(g)}$ existiert.

(d) Zeigen Sie, dass $\mu(g)\mu(h) \equiv \mu(gh) \bmod p$ für alle $g,\ h \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.

(e) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{F}_p^\times$, die Einheitengruppe von $\mathbb{F}_p$.

Aufgabe 14.3. [3 Punkte] Seien p, ζ wie oben und $f(x) = x^p - 2$. Sei λ die reelle Nullstelle von f und $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ die Nullstellenmenge von f.

(a) Zeigen Sie, dass $\Delta = \{\lambda,\ \lambda\zeta, \ldots, \lambda\zeta^{p-1}\}$ und dass $\mathbb{Q}(\zeta, \lambda)$ ein Zerfällungskörper für f über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\zeta, \lambda)\colon \mathbb{Q}] = (p-1)p$.

(c) Folgern Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}(\zeta)$ ist.

Aufgabe 14.4. [3 Punkte] Bestimmen Sie die Galoisgruppen der Zerfällungskörper der Polynome

$$X^4 - 8X^2 + 15,\ X^3 - 2,\ X^4 - 7,\ X^8 - 1.$$

Beschreiben Sie die Wirkung von Gruppenerzeugenden auf Körpererzeugende.

Aufgabe 14.5. [3 Punkte] Seien $p_1, \ldots, p_r$ verschiedene Primzahlen und

$$L = \mathbb{Q}\left(\sqrt{p_1}, \ldots, \sqrt{p_r}\right), \qquad \alpha = \sqrt{p_1} + \cdots + \sqrt{p_r}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ Galois ist und bestimmen Sie die Galoisgruppe.

(b) Beschreiben Sie die Menge $\{g\alpha \mid g \in \mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})\}$. Warum ist diese Menge in $\mathbb{Q}(\alpha)$ enthalten?

(c) Beweisen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Abgabetermin. Bis zum 23.01.2018 um 14.00 Uhr.

ALGEBRA I

Serie 15

Aufgabe 15.1. [3 Punkte] (a) Sei L/K eine Galoiserweiterung. Zeigen Sie, dass ein irreduzibles Polynom $f \in K[x]$ mit Zerfällungskörper L existiert.

(b) Sei K ein endlicher Körper der Ordnung q und p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass die Anzahl der irreduziblen Polynome vom Grad p über K genau $(q^p - q)/p$ ist.

Aufgabe 15.2. [2 Punkte] Finden Sie die Galoisgruppe eines Zerfällungskörpers L über $\mathbb{Q}$ des Polynoms $x^4 - 6x^2 - 1$. Bestimmen Sie die Grade der Unterkörper von L und die Anzahl der Unterkörper von jedem Grad.

Aufgabe 15.3. [3 Punkte] (a) Finden Sie die Galoisgruppe eines Zerfällungskörpers L für jedes der folgenden Polynome über $\mathbb{Q}$, und bestimmen Sie alle Unterkörper von L:

$$x^3 + 5x + 3,\ \Phi_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ \phi_{12} = x^4 - x^2 + 1,\ x^4 - 2x^2 + 7.$$

(b) die selbe Aufgabe, aber über $\mathbb{F}_5$, und dann über $\mathbb{F}_{11}$.

Aufgabe 15.4. [2 Punkte] (a) Seien N_1, N_2 Normalteiler einer Gruppe G. Zeigen Sie, dass $G/(N_1 \cap N_2)$ auflösbar ist, dann und nur dann wenn G/N_1 und G/N_2 auflösbar sind.

(b) Sei L/K Galois, M_1, M_2 Zwischenkörper mit M_1/K, M_2/K Galois, und M der von M_1, M_2 erzeugte Körper. Zeigen Sie, dass auch M/K Galois ist, und dass $\mathrm{Gal}(M/K)$ auflösbar ist, dann und nur dann, wenn $\mathrm{Gal}(M_1/K)$ und $\mathrm{Gal}(M_2/K)$ Galois sind.

Aufgabe 15.5. [3 Punkte] Sei f ein Polynom vom Grad 4 über einem Körper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$, und sei L sein Zerfällungskörper. Beweisen Sie die folgende Aussage: Falls $\mathrm{Gal}(L/K) \cong A_4$, dann ist L von der Form $L = M(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ für einen Körper M mit M/K Galois vom Grad 3 und Elemente $a, b \in M$.

Der *Körper der rationalen Funktionen in den Variablen* $x_1, \dots, x_n$, geschrieben $K(x_1, \dots x_n)$, ist der Quotientenkörper von $K[x_1, \dots, x_n]$.

Aufgabe 15.6. [2 Punkte] Sei K ein Körper mit $\operatorname{char} K = p > 0$, und $M = K(x_1, x_2)$, und sei $L = K(x_1^p, x_2^p)$. Beweisen Sie, dass $[M : L] = p^2$ und dass $u^p \in L$ für jedes $u \in M$. Folgern Sie, dass M/L nicht einfach ist.

Abgabetermin. Bis zum 30.01.2018 um 14.00 Uhr.