Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Prof. Dr. László Székelyhidi
Dr. Stefano Modena

WS2017/18

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 2
Lösungen bitte zur Übung am 20. Oktober 2017 mitbringen

Aufgabe 5 (Die Kelvin Transformation)**.**
Für $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ sei

$$v(x) := |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie, dass, falls $\Delta u = 0$, dann auch $\Delta v = 0$.

Lösung. Schreiben wir $v(x) = f(x)u(g(x))$, wobei $f(x) = |x|^{2-n}$, $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Die j-Komponent von g ist $g_j(x) = x_j|x|^2$. Berechnen wir Δv. Wir haben

$$\begin{aligned}
\partial_i v(x) &= \partial_i f u(g) + f \sum_j \partial_j u(g) \partial_i g_j \\
\partial_{ii} v(x) &= \partial_{ii} f u(g) + 2\partial_i f \sum_j \partial_j u(g)\partial_i g_j + \sum_j \sum_k f \partial_{kj} u(g) \partial_i g_k \partial_i g_j + \sum_j f \partial_j u(g) \partial_{ii} g_j \\
\Delta v &= \sum_i \partial_{ii} v \\
&= (\Delta f) u(g) + 2 \sum_j \Big(\sum_i \partial_i f \partial_i g_j \Big) \partial_j u(g) + \sum_{j,k} f \partial_{jk} u(g) \sum_i \partial_i g_k \partial_i g_j + \sum_j f \partial_j u(g) \Delta g_j \\
&= (\Delta f) u(g) + 2 \sum_j \big(\nabla f \cdot \nabla g_j\big) \partial_j u(g) + \sum_{j,k} f \partial_{j,k} u(g) \big(\nabla g_k \cdot \nabla g_j\big) + \sum_j f \partial_j u(g) \Delta g_j \\
&= \sum_j \partial_j u(g) \Big[2\nabla f \cdot \nabla g_j + f \Delta g_j \Big] + \sum_{j,k} f \partial_{kj} u(g) \nabla g_k \cdot \nabla g_j.
\end{aligned}$$

Zu berechnen sind dann: $\Delta f, \nabla f \cdot \nabla g_j, \nabla g_k \cdot \nabla g_j, \Delta g_j$. Wir haben $\Delta f = 0$, weil

f (eine Konstante mal) die Fundamentallösung von Δ ist. Dann

$$\begin{aligned}
\nabla f &= (2-n)|x|^{-n}x \\
\nabla g_j &= |x|^{-2}e_j - 2x_j|x|^{-4}x \\
\nabla f \cdot \nabla g_j &= (2-n)|x|^{-n}x \cdot \Big(|x|^{-2}e_j - 2x_j|x|^{-4}x\Big) \\
&= (2-n)|x|^{-n-2}x_j \\
\nabla g_k \cdot \nabla g_j &= \Big(|x|^{-2}e_k - 2x_k|x|^{-4}x\Big) \cdot \Big(|x|^{-2}e_j - 2x_j|x|^{-4}x\Big) \\
&= |x|^{-4}\delta_{jk} - 4|x|^{-6}x_k x_j + 4|x|^{-6}x_j x_k \\
&= |x|^{-4}\delta_{jk}, \\
\Delta g_j &= \operatorname{div}(\nabla g_j) \\
&= \operatorname{div}\Big(|x|^{-2}e_j - 2x_j|x|^{-4}x\Big) \\
&= 2(2-n)|x|^{-4}x_j
\end{aligned}$$

Hier ist δ_{jk}das Kronecker-Delta:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = j \\ 0 & \text{falls } k \neq j. \end{cases}$$

Deswegen

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \sum_j \partial_j u(g)\Big[2\nabla f \cdot \nabla g_j + f\Delta g_j\Big] + \sum_{j,k} f\partial_{kj}u(g)\nabla g_k \cdot \nabla g_j \\
&= \sum_j \partial_j u(g)\Big(2(n-2)|x|^{-n-2}x_j - 2(n-2)|x|^{2-n}|x|^{-4}x_j\Big) \\
&\quad + \sum_{j,k} \partial_{jk}u(g)|x|^{2-n}|x|^{-4}\delta_{jk} \\
&= \sum_j \partial_{jj}u(g)|x|^{-2-n} \\
&= \big(\Delta u\big)\big(g(x)\big)|x|^{-2-n} = 0,
\end{aligned}$$

weil u harmonisch ist.

Aufgabe 6. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet.

(a) Falls u und u^2 harmonisch[a] auf U sind, dann ist u konstant.

(b) Sei $u \in C^\infty(B_1)$, wobei $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$. Beweisen Sie, dass u harmonisch ist genau dann wenn $x \cdot \nabla u(x)$ harmonisch ist.

Lösung. (a) Es gilt

$$\Delta(u^2) = \operatorname{div}\big(\nabla(u^2)\big) = \operatorname{div}\big(2u\nabla u\big) = 2|\nabla u|^2 + 2u\Delta u.$$

Deswegen, falls $\Delta u = \Delta(u^2) = 0$, erhalten wir $|\nabla u| = 0$, d.h. u ist konstant.

[a]Siehe Aufgabe 3 für die Definition von harmonischen Funktionen.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\Delta(x\cdot\nabla u) &= \sum_i \partial_{ii}(x\cdot\nabla u)\\
&= \sum_i \partial_{ii}\Big(\sum_j x_j\partial_j u\Big)\\
&= \sum_{i,j} \partial_i\Big(\partial_i\Big(x_j\partial_j u\Big)\Big)\\
&= \sum_{i,j} \partial_i\Big(\delta_{ij}\partial_j u + x_j\partial_{ij}u\Big)\\
&\sum_i \partial_{ii}u + \sum_{i,j}\partial_i\Big(x_j\partial_{ij}u\Big)\\
&\Delta u + \sum_{i,j}\delta_{ij}\partial_{ij}u + x_j\partial_{iij}u\\
&= 2\Delta u + \sum_j x_j\partial_j(\Delta u)\\
&= 2\Delta u + x\cdot\nabla(\Delta u).
\end{aligned}$$

Deswegen, falls u harmonisch ist, dann ist auch $x\cdot\nabla u$ harmonisch.

Nehmen wir jetzt an, dass $x\cdot\nabla u$ harmonisch ist. Dann $2\Delta u + x\cdot\nabla(\Delta u) = 0$. Nennen wir $f := \Delta u$. Wir wissen, dass

$$2f + \nabla f = 0. \tag{1}$$

Die PDG (1) gibt uns Informationen über die Ableitung von f in den radialen Richtungen. Sei dann $v\in\mathbb{R}^n$, $|v| = 1$ eine Richtung (d.h. ein Vektor mit Länge 1) und betrachten wir die Funktion $g(t) := f(tv)$, $t\in(0,1)$. Es gilt

$$g'(t) = \nabla f(tv)v = \nabla f(tv)(tv)\frac{1}{t} = -2f(tv)\frac{1}{t} = -2\frac{g(t)}{t}, \tag{2}$$

weil f die PDG (1) erfüllt. Da g die GDG (2) erfüllt, soll $g(t) = A/t^2$, für $A\in\mathbb{R}$. Die einzige Möglichkeit ist, dass $A = 0$. Ansonsten hätten wir $f(tv) = A/t^2$ und, wenn $t\to 0$, $f(tv)\to f(0)\in\mathbb{R}$, aber $g(t) = A/t^2 \to\infty$, ein Widerspruch.

Deswegen, für alle $v\in\mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, ist $f(tv) = 0$, und dann ist $f\equiv 0$ auf B_1.

Aufgabe 7 (Fundamentallösung)**.**
Sei $L = \Delta + c$ in $\mathbb{R}^3$, wobei $c\in\mathbb{R}$ eine Konstante ist.
(a) Finden Sie alle rotationsinvariante Lösungen der Gleichung $Lu = 0$.
(b) Zeigen Sie, dass

$$\Psi(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}\cos(\sqrt{c}|x|), \qquad x\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$$

eine Fundamentallösung des Operators $\Delta + c$ auf $\mathbb{R}^3$ ist (d.h. zu zeigen ist, dass, falls $f\in C_c^2(\mathbb{R}^3)$ und $u(x) := \int_{\mathbb{R}^3}\Psi(x-y)f(y)dy$, dann $u\in C^2(\mathbb{R}^3)$ und $Lu = f$).

Aufgabe 8. Sei $n \geq 3$, $f \in C_c^2(B_R(0))$ und $u = \Phi \star f$, wobei Φ die Fundamentallösung von Δ ist. Beweisen Sie, dass falls f rotationsinvariant ist, dann

$$u(x) = \Phi(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy \qquad \text{für } |x| > R.$$

Hinweis: zeigen Sie zunächst, dass u rotationsinvariant ist.

Lösung. Beweisen wir zunächst, dass u rotationsinvariant ist, d.h. für alle $x, x' \in \mathbb{R}^n$, mit $|x| = |x'| \neq 0$, gilt $u(x) = u(x')$. Es existieren $v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\frac{x}{|x|}, v_2, \ldots, v_n$$

eine orthonormierte Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Egal, es existieren $v_2', \ldots, v_n'$, so dass

$$\frac{x'}{|x'|}, v_2', \ldots, v_n'$$

eine andere orthonormierte Basis von $\mathbb{R}^n$ ist. Sei jetzt $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die lineare Abbildung definiert durch

$$\frac{x}{|x|} \mapsto \frac{x'}{|x'|}, \quad v_2 \mapsto v_2', \ldots, v_n \mapsto v_n'.$$

Bemerken wir, dass $Ox = x'$, da $|x| = |x'|$. Wir haben

$$\begin{aligned} u(x') &= \int \Phi(y') f(x' - y') dy' \\ (\text{Substitution } y' = Oy) &= \int \Phi(Oy) f(x' - Oy) dy \\ &= \int \Phi(y) f(x' - Oy) dy, \end{aligned}$$

weil Φ rotationsinvariant ist und O eine Rotation ist. Bemerken wir jetzt, dass $|x' - Oy| = |Ox - Oy| = |x - y|$, weil O eine Rotation ist, und dann $f(x' - Oy) = f(x - y)$, da f rotationsinvariant ist. Deswegen

$$u(x') = \int \Phi(y) f(x' - Oy) dy = \int \Phi(y) f(x - y) = u(x),$$

und dann ist u rotationsinvariant.

Beweisen wir jetzt, dass die Formel

$$u(x) = \Phi(x) \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy \qquad \text{für } |x| > R.$$

gilt.

Da u, Φ, f rotationsinvariant sind, es existieren Funktionen v, ϕ, g, so dass $u(x) = v(|x|)$, $\Phi(x) = \phi(|x|)$, $f(x) = g(|x|)$, Da u eine Lösung von $-\Delta u = f$ ist, erfüllt v die GDG

$$v'' + \frac{n-1}{r} v' = g$$

auf $(0, \infty)$. Da supp $f \subseteq B(0, R)$, ist $g \equiv 0$ auf $[R, \infty)$. Deswegen soll v auf $[R, \infty)$ die Form

$$v(r) = \frac{A}{r^{n-2}} + B \tag{3}$$

haben.

Wir wollen jetzt die Konstanten A, B berechnen. Zunächst bemerken wir, dass $u(x) \to 0$ mit $x \to \infty$. Nämlich, sei $x_n \to \infty$ eine Folge. Wir haben

$$\begin{aligned}
|u(x_n)| &\leq \int_{B(x_n,R)} \Phi(y)|f(x_n - y)|dy \\
&\leq C\|f\|_{L^\infty} \int_{B(x_n,R)} \frac{1}{|y|^{n-2}}dy \\
&\leq C\|f\|_{L^\infty} \int_{B(x_n,R)} \frac{1}{|x_n| - R}dy \\
&\leq C\|f\|_{L^\infty} \frac{1}{|x_n| - R}\mathrm{Vol}\big(B(x_n, R)\big)
\end{aligned}$$

und der letzte Term konvergiert gegen 0, wenn $x_n \to \infty$. Deswegen auch $v(r) \to 0$ wenn $r \to \infty$. Da v die Form (3) auf $[R, \infty)$ hat, soll $B = 0$ sein.

Berechnen wir jetzt die Konstante A. Wir wissen dass $-\Delta u = f$. Deswegen

$$\int_{B(0,R)} f dx = -\int_{B(0,R)} \Delta u dx = -\int_{B(0,R)} \mathrm{div}(\nabla u)dx = -\int_{\partial B(0,R)} \nabla u(x)\cdot \frac{x}{|x|}dS(x)$$

Wir wissen auch, dass $u(x) = v(|x|)$ und dann $\nabla u(x) = v'(|x|)x/|x|$. Deswegen

$$\int_{B(0,R)} f dx = -\int_{\partial B(0,R)} \nabla u(x)\cdot \frac{x}{|x|}dS(x) = -\int_{\partial B(0,R)} v'(R)dS(x) = -v'(R)\big|\partial B(0, R)\big|.$$

Auf der anderen Seite, da v auf $[R, \infty)$ die Form $v(r) = A/r^{n-2}$ hat, haben wir

$$v'(R) = A(2 - n)\frac{1}{R^{n-1}}.$$

Deswegen

$$A(2 - n)\frac{1}{R^{n-1}} = -\frac{1}{\big|\partial B(0, R)\big|} \int f dx,$$

d.h.

$$A = \frac{1}{n(n - 2)\alpha(n)} \int f dx.$$

Deswegen hat v auf $[R, \infty)$ die Form

$$v(r) = \frac{1}{n(n - 2)\alpha(n)} \int f dx \frac{1}{r^{n-2}}$$

und dann ist u auf $\mathbb{R}^n \setminus B(0, R)$

$$u(x) = v(|x|) = \frac{1}{n(n - 2)\alpha(n)} \frac{1}{|x|^{n-2}} \int f dx = \Phi(x) \int f dx.$$

Alternative (und kürzere) Lösung durch Mittelwerteigenschaft. Durch die Mittelwerteigenschaft kann man eine kürzere lösung erhalten. Sei

g so dass $f(x) = g(|x|)$. Wir haben

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{B(0,R)} \Phi(x-y) f(y) dy \\
&= \int_0^R \int_{\partial B(0,r)} \Phi(x-y) f(y) dS(y) dr \\
\text{(da } f \text{ rotationsinvariant ist)} &= \int_0^R g(r) \int_{\partial B(0,r)} \Phi(x-y) dS(y) dr \\
&= \int_0^R g(r) \int_{\partial B(x,r)} \Phi(y) dy dr \\
(\Phi \text{ ist harmonisch auf } B(x,R), \text{ da } |x| > R) &= \int_0^R g(r) \Phi(x) |\partial B(x,r)| dr \\
&= \Phi(x) \int_0^R g(r) \int_{\partial B(0,r)} dS(y) dr \\
&= \Phi(x) \int_0^R \int_{\partial B(0,r)} f(x) dS(y) dr \\
&= \Phi(x) \int_{B(0,R)} f(x) dx.
\end{aligned}$$