

Übungen zur Vorlesung  
**Mathematik 3 für Physiker und Meteorologen**  
Blatt 9

**Aufgabe 1 (3 Punkte).** Seien  $\alpha, \kappa > 0$  und  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Schraubenlinie

$$\gamma(t) := (\cos(\alpha t), \sin(\alpha t), \kappa t).$$

Bestimme die Bogenlänge von  $\gamma$  sowie das Integral  $\int_{\gamma} \omega$  für die 1-Form

$$\begin{aligned} \omega : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^3 | \mathbb{R}) \\ (x, y) &\mapsto x dx + y dy + z dz. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2 (3 Punkte).** Seien  $\gamma, \rho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  reguläre Kurven mit  $\gamma(1) = \rho(0)$  und  $\omega$  eine 1-Form. Zeige, dass

$$\int_{\gamma\rho} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\rho} \omega.$$

**Aufgabe 3 (3 Punkte).** Zeige, dass die 1-Form

$$\begin{aligned} \omega : B_1(0) &\rightarrow \mathcal{L}(R^2 | R) \\ (x, y) &\mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy \end{aligned}$$

exakt ist und bestimme ein Potential.

**Aufgabe 4 (3 Punkte).** Skizziere die Kurve

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{cases} (t \cos(\frac{1}{t}), t \sin(\frac{1}{t})) & t \in (0, 1] \\ (0, 0) & t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und zeige, dass sie stetig ist.

Gib eine Formel für die Bogenlänge  $b(\epsilon)$  der Kurve auf dem Intervall  $[\epsilon, 1]$  an und zeige, dass  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} b(\epsilon) = \infty$  gilt.

Hinweis: Das auftretende Integral muss nicht explizit ausgerechnet werden.

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Dienstag, dem 12.12.2017 abzugeben.