Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Prof. Dr. László Székelyhidi
Dr. Stefano Modena

WS2017/18

Partielle Differentialgleichungen I
Blatt 7
Lösungen bitte zur Übung am 24. November 2017 mitbringen

Aufgabe 25. Sei $u \in C^2(B(0,R))$ harmonisch und nicht-negativ. Zeigen Sie die folgende Version der Harnack'schen Ungleichung:

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \le u(x) \le \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0)$$

für alle $x \in B(0,R)$. *Hinweis:* Skalieren Sie auf $R=1$ und benutzen die Poisson'sche Darstellungsformel.

Aufgabe 26 (Hebbarkeitssatz)**.** Sei $n \ge 2$ und B die offene Einheitskugel. Sei $u \in C^2(B \setminus \{0\})$ eine beschränkte harmonische Funktion. Beweisen Sie, dass $a := \lim_{x\to 0} u(x)$ existiert, und wenn wir $u(0) := a$ setzen, dann u harmonisch auf B ist.

Hinweis: Sei v die Lösung des Dirichletproblems

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B, \\ v = u & \text{auf } \partial B, \end{cases}$$

und $w(x) = \Phi(x) - \Phi(e_1)$, wobei Φ das Newton'sche Potential ist. Zeigen Sie mithilfe des Maximumprinzips in Gebieten der Form $B \setminus B_\delta(0)$, dass $|u(x) - v(x)| \le \varepsilon |w(x)|$ für alle $x \in B \setminus \{0\}$ und alle $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 27. Sei $K_j \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $j = 1, 2, \dots$ eine Familie von 2π-periodischen Funktionen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_j(x)\,dx = 1$,

(ii) $K_j(x) \ge 0$ für alle x,

(iii) für alle $\delta > 0$ gilt: $\int_{\delta<|x|<\pi} K_j(x)\,dx \to 0$ mit $j \to \infty$.

Sei $f \in C(\mathbb{R})$ 2π-periodisch. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_j(x-y)f(y)\,dy \to f(x) \text{ mit } j \to \infty$$

gleichmässig in x ist. Was ist das Limes, wenn K_j symmetrisch ist für alle j, aber f nur stückweise stetig ist?

Aufgabe 28. Bestimmen Sie die Greensche Funktion für

(i) die Halbkugel $\overset{\circ}{B}(0,1) \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$,

(ii) das Gebiet $\{(r\cos\theta, r\sin\theta) : r > 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{N}\}$ für $N \in \mathbb{N}$.

Begründen Sie Ihre Antworten.