

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 12

Lösungen bitte zur Übung am 12. Januar 2018 mitbringen

Aufgabe 45. Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ mit $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$. Zeigen Sie die Identität

$$u(x+h, t+k) + u(x-h, t-k) = u(x+k, t+h) + u(x-k, t-h)$$

für alle $x, t, h, k \in \mathbb{R}$.

Lösung. Wir zeigen zunächst die folgende Behauptung.

Behauptung. Jede Lösung $u(x, t)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, der Wellengleichung hat die Form

$$u(x, t) = G(x+t) + F(x-t),$$

wobei $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis der Behauptung. Betrachten wir die Variablenwechsel

$$y = x+t, \quad s = x-t,$$

(und dann $x = (y+s)/2$, $t = (y-s)/2$) und sei

$$v(y, s) := u\left(\frac{y+s}{2}, \frac{y-s}{2}\right).$$

Da u die Wellengleichung erfüllt, haben wir

$$\partial_{ys} v(y, s) = \partial_y (\partial_s v) = 0.$$

In anderen Wörtern ist die Funktion $\partial_s v$ unabhängig von y , d.h. eine Funktion f existiert so, dass

$$\partial_s v(y, s) = f(s).$$

Deswegen

$$v(y, s) = v(y, 0) + \int_0^s f(\sigma) d\sigma = G(y) + F(s),$$

wobei $G(y) := v(y, 0)$ und $F(s) := \int_0^s f(\sigma) d\sigma$. Wir haben dann

$$u(x, t) = v(x+t, x-t) = G(x+t) + F(x-t). \quad \square$$

Es ist jetzt einfach, zu sehen, dass

$$u(x+h, t+k) + u(x-h, t-k) = G(x+h+t+k) + F(x+h-t-k) + G(x-h+t-k) + F(x-h-t+k)$$

und

$$u(x+k, t+h) + u(x-k, t-h) = G(x+k+t+h) + F(x+k-t-h) + G(x-k+t-h) + F(x-k-t+h)$$

und die letzte zwei Ausdrücke sind gleich.

Aufgabe 46. Sei $g \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ und $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ eine Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u - \Delta u &= 0 & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u &= g & t = 0 \\ \partial_t u &= 0 & t = 0,\end{aligned}$$

mit u und $\partial_t u$ beschränkt. Sei

$$v(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, s) ds.$$

Zeigen Sie, dass v die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}\partial_t v - \Delta v &= 0 & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ v &= g & t = 0\end{aligned}$$

ist.

Lösung. Sei

$$V(x, \sigma, t) := \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|\sigma-s|^2}{4t}} u(x, s) ds, \quad x \in \mathbb{R}^n, \sigma \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Wenn wir x als Parameter betrachten, σ als “Raum”-Variabel, und t als “Zeit”-Variable, können wir sehen, dass $(\sigma, t) \mapsto V(x, \sigma, t)$ die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned}\partial_t V(x, \sigma, t) - \partial_{\sigma\sigma} V(x, \sigma, t) &= 0, \\ V(x, \sigma, 0) &= u(x, \sigma)\end{aligned}$$

ist. Außerdem für die Funktion $v(x, t)$ definiert in der Aufgabe gilt

$$v(x, t) = V(x, 0, t). \tag{m}$$

Um zu beweisen, dass $\partial_t v - \Delta v = 0$, verwenden wir die Gleichung (m). Wir haben

$$\partial_t v(x, t) = \partial_t V(x, 0, t) = \partial_{\sigma\sigma} V(x, 0, t)$$

und

$$\Delta v(x, t) = \Delta_x V(x, 0, t).$$

Zu beweisen ist dann, dass $\partial_{\sigma\sigma} V(x, 0, t) = \Delta_x V(x, 0, t)$. Wir haben

$$\partial_{\sigma} V(x, \sigma, t) = -\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \frac{1}{2t} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma - s) e^{-\frac{|\sigma-s|^2}{4t}} u(x, s) ds,$$

und

$$\partial_{\sigma\sigma} V(x, \sigma, t) = -\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}(2t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|\sigma-s|^2}{4t}} u(x, t) \left[1 - \frac{1}{2t}(\sigma - s)^2 \right] ds.$$

Deswegen

$$\partial_{\sigma\sigma} V(x, 0, t) = -\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}(2t)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, t) \left[1 - \frac{s^2}{2t} \right] ds.$$

Auf der anderen Seite,

$$\begin{aligned}\Delta_x V(x, 0, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} \Delta u(x, s) ds \\ (\text{da } u \text{ die Wellengleichung löst}) &= \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} \partial_{ss} u(x, s) ds\end{aligned}$$

Durch partielle Integration in s (zweimal), und indem wir die Tatsache verwenden, dass $\partial_s u$ und u beschränkt sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta_x V(x, 0, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} \partial_{ss} u(x, s) ds \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \frac{1}{2t} \int_{-\infty}^{+\infty} s e^{-\frac{s^2}{4t}} \partial_s u(x, s) ds \\ &= -\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \frac{1}{2t} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_s \left(s e^{-\frac{s^2}{4t}} \right) u(x, s) ds \\ &= -\frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \frac{1}{2t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}} u(x, s) \left[1 - \frac{s^2}{2t} \right] ds \\ &= \partial_{\sigma\sigma} V(x, 0, t),\end{aligned}$$

so, dass v eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist. Es fehlt noch zu beweisen, dass $v(x, 0) = g(x)$. Wir wissen schon, dass $V(x, \sigma, t) \rightarrow u(x, \sigma)$ mit $t \rightarrow 0$ für alle $\sigma \in \mathbb{R}$. Insbesondere

$$v(x, t) = V(x, 0, t) \rightarrow u(x, 0) = g(x).$$

Aufgabe 47 (Die Kirchhoff'sche Formel für $n = 3$). Sei $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ und

$$u(x, t) := t \oint_{\partial B(x, t)} g(y) dS(y).$$

Zeigen Sie, dass

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0, \infty))$,
- (ii) $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$.
- (iii) falls g kompakten Träger hat, dass

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty),$$

für ein $C > 0$.

Hinweis zu (ii): Zeigen Sie, dass $\partial_t \oint_{\partial B(x, t)} g = \oint_{\partial B(x, t)} \partial_\nu g$ und benutzen Sie die Green'sche Identität.

Aufgabe 48 (Die Poisson'sche Formel für $n = 2$). Sei $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ und

$$u(x, t) := \frac{1}{2\pi} \int_{B(x, t)} \frac{g(y)}{(t^2 - |x - y|^2)^{1/2}} dy.$$

Zeigen Sie, dass, falls g kompakten Träger hat,

(i) für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ ein C_x existiert so dass

$$|u(x, t)| \leq \frac{C_x}{t} \quad \text{für } t > 0.$$

(ii) eine Konstante $C > 0$ existiert so dass

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{t^{1/2}} \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \times (0, \infty),$$

Hinweis zu (ii): Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert so dass

$$\sup_x \int_{B(0,1) \cap B(x,\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}} dy \leq C\varepsilon^{3/2}.$$

Lösung. Es fehlte noch (ii) zu beweisen. Sei $\text{supp } g \subseteq B(0, R)$. Wir haben

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{B(x,t) \cap B(0,R)} \frac{g(y)}{(t^2 - |x-y|^2)^{1/2}} dy$$

(Variablenwechsel $y = x - tw$) $= \frac{t}{2\pi} \int_{B(0,1) \cap B(x/t, R/t)} \frac{g(x-tw)}{(1-|w|^2)^{1/2}} dw.$

Deswegen, dank dem Hinweis,

$$|u(x, t)| \leq \frac{\|g\|_{L^\infty} t}{2\pi} C \left(\frac{R}{t} \right)^{3/2} \leq \frac{\tilde{C}}{t^{1/2}}.$$

Wir sollen dann noch den Hinweis beweisen. Das Problem hier ist, wenn ε „klein“ ist. Wir betrachten drei Fälle.

1. Sei $\varepsilon \geq 1/4$. Dann

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1) \cap B(x,\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}} dy &\leq \int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}} dy \frac{\varepsilon^{3/2}}{\varepsilon^{3/2}} \\ (\text{da } \varepsilon \geq 1/4) &\leq \left(4^{3/2} \int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}} dy \right) \varepsilon^{3/2}. \end{aligned}$$

2. Sei $\varepsilon \leq 1/4$ und $|x| \leq 1/2$. Dann jeder $y \in B(0,1) \cap B(x,\varepsilon)$ erfüllt $|x| \leq 3/4$.
Deswegen

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1) \cap B(x,\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}} dy &\leq \frac{1}{\sqrt{1-(3/4)^2}} |B(x,\varepsilon)| \\ &\leq C\varepsilon^2 \\ (\text{da } \varepsilon \leq 1/4) &\leq C\varepsilon^{3/2}. \end{aligned}$$

3. Sei jetzt $\varepsilon \leq 1/4$ und $|x| \geq 1/2$. Das ist der schwierigste Fall, da ε klein ist, aber x kann neben dem Rand von $B(0,1)$ liegen, wo die Funktion $1/\sqrt{1-|y|^2}$ sehr groß ist. In diesem Fall, können wir einen Winkel $\bar{\vartheta} \in [0, \pi/4]$ finden so, dass

$$B(x, \varepsilon) \subseteq \left\{ (r, \vartheta) : r \in [|x| - \varepsilon, |x| + \varepsilon] \text{ und } |\vartheta| \leq \bar{\vartheta} \right\} := E$$

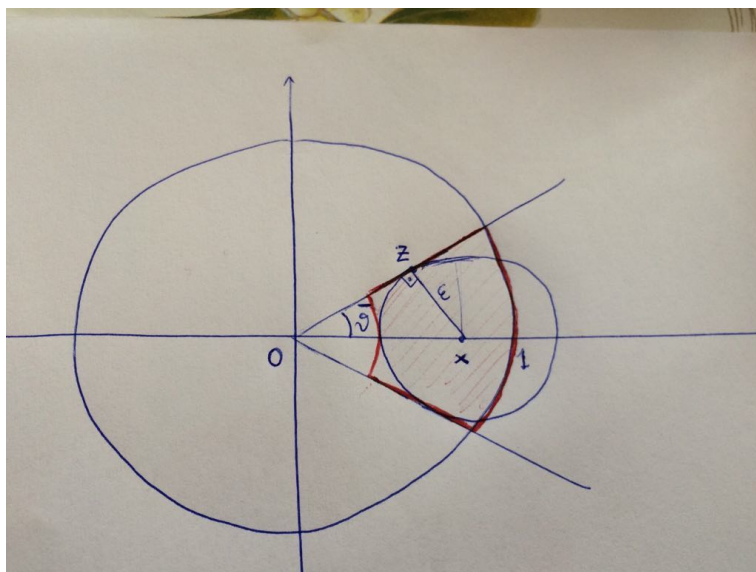


Abbildung 1: Beweis vom Hinweis in der Aufgabe 48

wobei (r, ϑ) sind die Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$:

$$x_1 = r \cos \vartheta, \quad x_2 = r \sin \vartheta.$$

Die Menge E ist die rote Menge in der Abbildung 1. Wir haben dann (indem wir mit Polarkoordinaten arbeiten):

$$\begin{aligned} \int_{B(0,1) \cap B(x,\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}} dy &\leq \int_{\max\{|x|-\varepsilon, 0\}}^{\min\{|x|+\varepsilon, 1\}} \int_{-\bar{\vartheta}}^{+\bar{\vartheta}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} d\vartheta dr \\ &\leq 2\bar{\vartheta} \int_{\max\{|x|-\varepsilon, 0\}}^{\min\{|x|+\varepsilon, 1\}} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ (\text{da } r \mapsto r/\sqrt{1-r^2} \text{ monoton steigend ist}) &\leq 2\bar{\vartheta} \int_{1-2\varepsilon}^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ &= 2\bar{\vartheta} \sqrt{\varepsilon} \sqrt{1-\varepsilon} \\ &\leq 2\bar{\vartheta} \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Wir brauchen dann jetzt eine Abschätzung von der Form $\bar{\vartheta} \leq C\varepsilon$. Sei $z \in \partial B(x, \varepsilon)$ so, dass die Gerade durch O und z tangent zu dem Kreis $\partial B(x, \varepsilon)$ ist (siehe Abbildung 1). Betrachten wir das Dreieck Ozx , das rechtwinklig in z ist. Deswegen

$$\sin \bar{\vartheta} = \frac{\varepsilon}{|x|}.$$

Deshalb, da $|x| \geq 1/2$,

$$\bar{\vartheta} \approx \sin \bar{\vartheta} = \frac{\varepsilon}{|x|} \leq 2\varepsilon,$$

wobei $\bar{\vartheta} \approx \sin \bar{\vartheta}$, da $\bar{\vartheta} \in [0, \pi/4]$.