Analysis 1

Serie 2

Abgabe: 26.10. vor der Vorlesung in den Briefkästen im Raum A514 (man beachte die Zuteilung der Briefkästen im nächsten Dokument)

Aufgabe 1 (Punkte: 3+3)**.**

(a) Zeige mit vollständiger Induktion die Formel $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Nachfolgerabbildung und die Funktion $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die induktiv durch $g(m, 0) = m$ und $g(m, f(n)) = f(g(m, n))$ festgelegt ist. Zeige mittels Doppelinduktion, dass $g(m, n) = g(n, m)$.

Aufgabe 2 (Punkte: 6 (3 für den Spezialfall $n = 2$))**.** Zeige die Formel

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m = \sum_{\alpha:\{1,..,n\}\to\mathbb{N}} c_\alpha \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha(i)},$$

wobei $c_\alpha = 0$ für $\sum_{i=1}^{n} \alpha(i) \neq m$ und $c_\alpha = \frac{m!}{\prod_{i=1}^{n} \alpha(i)!}$ sonst.

Aufgabe 3 (Punkte: 4+6 Zusatzpunkte)**.** Sei auf $2^{\mathbb{N}}$ die Relation R erklärt durch $R = \{(M_1, M_2) | M_1 \subset M_2\}$.

(a) Zeige, dass R eine partielle Ordnungsrelation ist.

(b) Sei $i : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$ definiert durch $i(n) = \{m | m \leq n\}$. Zeige falls $M \in 2^{\mathbb{N}}$ erfüllt, dass $R \cap \tilde{M} \times \tilde{M}$ eine totale Ordnung ist, wobei $\tilde{M} = \{M\} \cup i(\mathbb{N})$, so gilt $M \in i(\mathbb{N}) \cup \{\emptyset\} \cup \mathbb{N}$.