

Übungen zur Vorlesung
Mathematik 3 für Physiker und Meteorologen
Blatt 02

Aufgabe 1 (3 Punkte). Bestimme alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = (1 + y^2)x$$

mit den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$ beziehungsweise $y(\sqrt{\pi}) = 0$. Bestimme insbesondere die maximalen Definitionsbereiche der Lösungen

Aufgabe 2 (3 Punkte). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und I ein offenes Intervall das die 0 nicht enthält. Zeige, dass $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ist, genau dann wenn

$$u : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{y(x)}{x}$$

die Differenzialgleichung

$$u'(x) = \frac{f(u(x)) - u(x)}{x}$$

löst.

Aufgabe 3 (4 Punkte + 2 Zusatzpunkte). Bestimme alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = \left| \frac{y}{x} \right|$$

mit den Anfangsbedingungen $y(1) = 1$ beziehungsweise $y(1) = -1$. Bestimme insbesondere die maximalen Definitionsbereiche der Lösungen.

Zusatzfrage: Bestimme alle Lösungen des Anfangswertproblems mit den Anfangsbedingungen $y(1) = 0$.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Zeige, dass $e^x e^y = e^{(x+y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems $y' = y$, $y(0) = y_0$ kann vorausgesetzt werden (siehe Beispiel 4.4).

Die schriftlich bearbeiteten Übungsaufgaben sind vor der Vorlesung am Dienstag, dem 24.10.2017 abzugeben.