10. Übungsblatt zu "Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 11.12.2017

37.) Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sei definiert durch $f(x) := \frac{1}{x}$. Beweisen Sie, dass f *nicht* gleichmäßig stetig ist.

38.) Für einen fixierten Parameter $a \in \mathbb{R}$ sei die Funktion $f_a : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_a(x) := \frac{x^2+5x+a}{x-1}.$$

Untersuchen Sie – mit Begründung, für welche Parameter a die Funktion f_a zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann. Bestimmen Sie gegebenenfalls auch $\tilde{f}_a(1)$.

39.) Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_1(x) := exp(-x^2 + 6x + 10)$.

ii) $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, gegeben durch $f_2(x) := x^x$.

iii) $f_3 :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, gegeben durch $f_3(x) := arcsin(x)$.

iv) $g_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g_\alpha(x) := exp(-\tfrac{x}{2}) \cdot cos(\tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot x \,+\, \alpha),$$

wobei α ein beliebiger reeller Parameter ist. Zeigen Sie genauer: $g'_\alpha = g_\beta$ für $\beta := \alpha + \frac{2\pi}{3}$. Was ist also g'''_α ?

Berechnen Sie auch die globale Maximalstelle von f_1 und die globale Minimalstelle von f_2.

Hinweise: Wenden Sie in den Teilen i) und ii) die Kettenregel an und in iii) die Formel für die Umkehrfunktion.
Stellen Sie die Funktion f_2 zunächst dar in der Gestalt $f_2(x) = exp(g_2(x))$ für eine geeignete Funktion g_2.
In iv) können Sie das Additionstheorem für die Cosinus-Funktion sowie – neben den bekannten Symmetrie-Eigenschaften – Aufgabe 33 benutzen.

40.) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $]a, b[$. Beweisen Sie – siehe auch Satz 4.11:

i) f ist genau dann auf dem gesamten Definitionsbereich $[a, b]$ monoton wachsend, wenn für alle $x \in]a, b[$ gilt: $f'(x) \geq 0$.

ii) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f auf $[a, b]$ streng monoton wachsend.

Hinweis: Benutzen Sie in beiden Teilen den Mittelwertsatz.