

Partielle Differentialgleichungen I

Blatt 6

Lösungen bitte zur Übung am 17. November 2017 mitbringen

Aufgabe 21. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch und es gelte die Ungleichung

$$|u(x)| \leq C(1 + |x|^N) \quad x \in \mathbb{R}^n$$

für ein $C > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass u ein Polynom von Grad $\leq N$ ist.

Lösung. Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Für alle Multiindices α mit $k := |\alpha| > N$ und für alle $r > 0$ gilt (die Konstante C kann sich in jeder Zeile verändern):

$$\begin{aligned} |D^\alpha(x_0)| &\leq \frac{C}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \\ &\leq \frac{C}{r^k} \max_{\bar{B}(x_0, r)} |u(x)| \\ &\leq \frac{C}{r^k} \max_{\bar{B}(x_0, r)} (1 + |x|^N) \\ &\leq \frac{C}{r^k} (1 + (r + |x_0|)^N). \end{aligned}$$

Da $k > N$, gilt der Limes

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{C}{r^k} (1 + (r + |x_0|)^N) = 0.$$

Deswegen $D^\alpha(x_0) = 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $|\alpha| > N$. Deshalb ist u ein Polynom von Grad $\leq N$.

Aufgabe 22. Sei $\delta \in (0, 1/2)$, $U = (\delta, 1 - \delta) \times \mathbb{R}$ und $u \in C^2(U)$ harmonisch mit $u = 0$ auf ∂U und

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \sup_x |u(x, y)| e^{-\pi|y|} = 0.$$

Zeigen Sie, dass $u \equiv 0$ in U .

Hinweis: vgl. Aufgabe 1 und verwende das Maximumprinzip in dem Gebiet $U_N = (\delta, 1 - \delta) \times (-N, N)$ für $N > 0$.

Aufgabe 23.

- (i) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ harmonisch und $u \geq 0$. Zeigen Sie, dass u konstant ist.
- (ii) Geben Sie ein Beispiel für ein $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $n \geq 3$, die harmonisch ist, $u \geq 0$, aber nicht konstant.
- (iii*) Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ harmonisch und $u \geq 0$. Zeigen Sie, dass u konstant ist. *Hinweis:* finden Sie eine konforme Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und betrachten Sie $u \circ f$.

Aufgabe 24. Sei $U = \{(r, \theta) : 1 < r < 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ ein Ringgebiet. Lösen Sie das Dirichletproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } U \\ u(x) &= \begin{cases} \cos(\theta) & \text{für } x = e^{i\theta}, \\ 1 - \cos(2\theta) & \text{für } x = 2e^{i\theta}. \end{cases} \end{aligned}$$

Hinweis: Es besteht ein wesentlicher Unterschied zum Fall des Kreisgebietes, denn $0 \notin U$.