

13. Übungsblatt zu "Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler"

Leipzig, den 15.1.2018

49.) Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

i) $\int_0^4 (x-2) \cdot (x^2 - 4x + 5)^3 dx,$

ii) $\int_0^{1,5} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} dx,$

iii) $\int_1^3 x \cdot \exp(x^2) dx,$

iv) $\int_0^{2\pi} e^x \cdot \cos(x) dx.$

50.) Sei $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sin(x)$. Berechnen Sie den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die der Graph von f mit der x -Achse einschließt.

51.) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und $b > 0$ vorgegeben. Bestimmen Sie $u \in \mathbb{R}^+$ – mit Begründung – so, dass gilt:

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = \int_b^u \frac{1}{x} dx.$$

52.) Sei $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine stetige Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, das symmetrisch zum Nullpunkt ist.

Definiere $g : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) := f(-x)$, und F sei eine Stammfunktion von f .

i) Beweisen Sie: $G : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $G(x) := -F(-x)$ ist eine Stammfunktion von g .

ii) Verifizieren Sie, dass für alle $u, v \in [a, b]$ mit $u \leq v$ gilt:

$$\int_u^v f(x) dx = \int_{-v}^{-u} g(x) dx,$$

und interpretieren Sie diese Gleichung geometrisch.

iii) Beweisen Sie: Ist f eine gerade Funktion und F diejenige Stammfunktion mit $F(0) = 0$, so ist F eine ungerade Funktion. Benutzen Sie dazu ii) für alle v mit $0 = u < v \leq a$. Zeigen Sie außerdem:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx.$$

iv) Beweisen Sie: Ist f eine ungerade Funktion, so ist die Stammfunktion F in jedem Fall gerade. Benutzen Sie dazu ii) für alle $v \in [0, a]$ und $u := -v$. Verifizieren Sie insbesondere:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

v) Berechnen Sie $\int_{-1}^1 \sin(x^3) dx$.